Základy kombinatoriky a teorie grafů — 1. cvičení*

19. února 2018

(Neorientovaný) graf G je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je neprázdná množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran. Důležitými grafy jsou například

- *úplný graf* na n vrcholech $K_n = (V, \binom{V}{2})$, $|V| = n$,
- *cyklus* $C_n = (\{1, \dots, n\}, \{\{i, i+1\}: i = 1, \dots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\})$,
- *cesta* $P_n = (\{1, \dots, n\}, \{\{i, i+1\}: i = 1, \dots, n-1\})$,
- *úplný bipartitní graf* $K_{m,n}$, kde $m, n \geq 1$, $V = \{u_1, \dots, u_n\} \cup \{v_1, \dots, v_m\}$ a $E = \{\{u_i, v_j\}: i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m\}$.

Graf H je *podgrafem* grafu G, pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. *Stupeň vrcholu* v je počet hran grafu G obsahujících vrchol v, značíme jej $\deg_G(v)$. Graf G je *souvislý*, pokud v něm pro každé jeho dva vrcholy u, v existuje cesta z u do v. Řekneme, že grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ jsou *izomorfní*, pokud existuje bijekce $f: V \to V'$ taková, že platí $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když $\{f(u), f(v)\} \in E'$. Jako *doplněk grafu* G značíme graf $\overline{G}$, který má hrany právě mezi těmi vrcholy, mezi kterými je G nemá. *Kostra grafu* $G = (V, E)$ je maximální souvislý graf bez kružnice (tj. *strom*) tvaru (V, E'), kde $E' \subseteq E$.

Princip sudosti. *Pro každý graf* $G = (V, E)$ *platí*

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|.$$

1 Opakování z teorie grafů

Příklad 1. *Je následující důkaz tvrzení „Každý graf s alespoň třemi vrcholy a se všemi stupni velikosti alespoň dva obsahuje cyklus* C_3*." správný?*

Důkaz. Postupujeme indukcí podle počtu vrcholů n. Tvrzení platí v případě $n = 3$, protože daný graf může být jen C_3. Uvažme indukční krok, nechť G je graf na $n-1$ vrcholech se všemi stupni velikosti alespoň dva. Pro G tvrzení platí z indukčního předpokladu a tedy obsahuje C_3. Vytvoříme z G nový graf G' na n vrcholech přidáním nového vrcholu, který je incidentní s alespoň dvěma vrcholy z G. Protože G obsahoval cyklus C_3, tak jej G' obsahuje také. $\square$

Příklad 2. *Ukažte, že každý souvislý graf* G *s alespoň dvěma vrcholy obsahuje dva různé vrcholy* u, v, *takové, že* $G - u$ *i* $G - v$ *jsou souvislé.*

Příklad 3. *Dokažte, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Musí to platit obráceně? Tedy musí být každý graf se souvislým doplňkem nesouvislý?*

Příklad 4. *Existuje graf s alespoň dvěma vrcholy takový, že všechny jeho vrcholy mají navzájem různé stupně?*

Příklad 5. *Strom na* 4152 *vrcholech má pouze vrcholy stupně* 1 *a* 3*. Kolik minimálně a maximálně může mít* listů *(tj. vrcholů stupně 1)?*

Příklad 6. *Odvoďte minimální a maximální počet hran v grafu s* n *vrcholy a* k *komponentami souvislosti.*

Příklad 7. *Ukažte, že každý graf* G *obsahuje vrchol* u *a množinu aspoň* $\lfloor \frac{1}{2} \deg_G(u) \rfloor$ *cyklů takových, že každé dva sdílejí pouze vrchol* u *a žádný jiný.*

Příklad 8. *Nechť máme* $m, n, k \in \mathbb{N}$.

(a) Spočítejte počet kružnic délky k *v grafu* K_n.

(b) Spočítejte počet kružnic délky k *v grafu* $K_{m,n}$.

Příklad 9. *Spočtěte počet koster úplného bipartitního grafu* $K_{2,n}$.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/