Základy kombinatoriky a teorie grafů — 14. cvičení*

21. května 2018

1 NP-úplnost a polynomiální převoditelnost

Rozhodovací problém P lze chápat takto: pro daný vstup $x \in L(P)$, kde $L(P)$ je jazyk obsahující všechny instance problému P, chceme rozhodnout, zda $x \in L(P)_Y$ či $x \in L(P)_N$, kde $L(P)_Y =$ kódy instancí s odpovědí ANO a $L(P)_N =$ kódy instancí s odpovědí NE.

Splnitelnost (SAT)
Vstup: Formule F v KNF s n Booleovskými proměnnými.
Otázka: Existuje pravdivostní ohodnocení proměnných formule F, které splňuje F?

3-Splnitelnost (3SAT)
Vstup: Kubická formule F v KNF s n Booleovskými proměnnými.
Otázka: Existuje pravdivostní ohodnocení proměnných formule F, které splňuje F?

3-Barvení grafu (3-BG)
Vstup: Neorientovaný graf G.
Otázka: Lze obarvit vrcholy G třemi barvami tak, aby žádná hrana neměla koncové vrcholy stejné barvy?

Klika (KL)
Vstup: Neorientovaný graf G a přirozené číslo k.
Otázka: Obsahuje G úplný podgraf na k vrcholech?

Nezávislá podmnožina (NM)
Vstup: Neorientovaný graf G a přirozené číslo q.
Otázka: Obsahuje G nezávislou podmnožinu velikosti q?

Hamiltonovská kružnice (HK)
Vstup: Neorientovaný graf G.
Otázka: Obsahuje G hamiltonovskou kružnici?

Obchodní cestující (TSP)
Vstup: Úplný neorientovaný graf $G = (V, E)$, váhy $w\colon E \to \mathbb{N}_0$ a číslo $k \in \mathbb{N}_0$.
Otázka: Existuje v G hamiltonovská kružnice s celkovou váhou nejvýše k?

Jako NP označme třídu jazyků L, které mají polynomiální nedeterministickou časovou složitost, tj. existuje nedeterministický Turingův stroj, který nad každým vstupem $w \in \{0,1\}^*$ délky n udělá nejvýše polynomiálně mnoho kroků vzhledem k n, než se zastaví a přijímá právě jazyk L. Rozhodovací problém P je v NP, pokud $L(P)_Y \in \mathsf{NP}$.

Funkce $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ je *polynomiálně vyčíslitelná* tehdy a jen tehdy, když existuje polynom p a deterministický Turingův stroj transducer A takový, že pro každý vstup $x \in \{0,1\}^*$ dává A výstup $f(x)$ po vykonání nanejvýš $p(|x|)$ kroků. Jazyk $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ je *polynomiálně převoditelný* na jazyk $L_2 \subseteq \{0,1\}^*$, značeno $L_1 \propto L_2$, tehdy a jen tehdy, když existuje polynomiálně vyčíslitelná funkce $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ taková, že $\forall x \in \{0,1\}^*\colon (x \in L_1) \equiv (f(x) \in L_2)$. Problém P je NP-těžký tehdy a jen tehdy, když $\forall Q \in \mathsf{NP} : L(Q)_Y \propto L(P)_Y$. Je-li navíc $L(P)_Y \in \mathsf{NP}$, pak říkáme, že P je NP-úplný. Všechny rozhodovací problémy zmíněné výše jsou NP-úplné.

Příklad 1. *Ukažte následující polynomiální převody.*

(a) KL $\propto$ NM,

(b) HK $\propto$ TSP,

(c) SAT $\propto$ 3-SAT,

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

(d) SAT $\propto$ KL,

(e) 3-SAT $\propto$ 3-BG.

Příklad 2. *Uvažme následující dva problémy.*

Krátká cesta (SPATH)
Vstup*: Graf G, jeho dva vrcholy u, v a $k \in \mathbb{N}$.*
Otázka*: Existuje v G cesta mezi u a v délky nanejvýš k?*

Dlouhá cesta (LPATH)
Vstup*: Graf G, jeho dva vrcholy u, v a $k \in \mathbb{N}$.*
Otázka*: Existuje v G cesta mezi u a v délky aspoň k?*

Rozhodněte, zda některý z těchto problémů patří do třídy P. *Je některý z nich* NP*-úplný?*