Základy kombinatoriky a teorie grafů — 12. cvičení*

7. května 2018

1 Ramseyova teorie

Jako *hypergraf* označme dvojici $\mathcal{H} = (V, E)$, kde $E \subseteq 2^V$. Řekneme, že $\mathcal{H}$ je *m-uniformní*, pokud $E \subseteq \binom{V}{m}$. Tedy grafy odpovídají 2-uniformním hypergrafům. Úplný m-uniformní hypergraf na n vrcholech označíme K_n^m.

Ramseyova věta pro hypergrafy. *Nechť $l, m, a_1, a_2, \ldots, a_l$ jsou libovolná přirozená čísla. Potom existuje přirozené číslo n takové, že každé obarvení hran hypergrafu K_n^m l barvami obsahuje $K_{a_i}^m$ barvy i pro nějaké $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$.*

Nejmenší takové číslo n se značí $R_l^m(a_1, a_2, \ldots, a_l)$ a nazývá se *Ramseyovo číslo.* V případě grafů (tj. $m = 2$) se značí pouze $R_l(a_1, a_2, \ldots, a_l)$.

Příklad 1. *Happy Ending Problem.*

(a) Ukažte, že v každé množině pěti bodů v $\mathbb{R}^2$ v obecné poloze *(tj. žádné tři body neleží na společné přímce) lze nalézt konvexní čtyřúhelník.*

(b) Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje přirozené $N = N(k)$ takové, že každá množina N bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^2$ obsahuje k bodů v konvexní poloze.

Příklad 2. *Určete nejmenší N takové, že v každém červeno-modrém obarvení hran K_N najdeme buď modrou kopii $K_{1,3}$ nebo červenou kopii K_3.*

Příklad 3. *Erdősovo–Szekeresovo lemma o podposloupnostech.*

(a) Ukažte, že v každé posloupnosti $(m-1)(n-1)+1$ různých přirozených čísel existuje buď rostoucí podposloupnost délky m nebo klesající podposloupnost délky n.

(b) Nalezněte posloupnost 16 různých přirozených čísel, která neobsahuje rostoucí ani klesající podposloupnost délky 5.

Příklad 4. *(a) Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo $M(n)$ takové, že každá $\{0,1\}$-matice s rozměry $M(n) \times M(n)$ obsahuje $n \times n$ podmatici, která obsahuje buď jen nuly nebo jen jedničky.*

(b) Sestrojte libovolně velkou $\{0,1\}$-matici, která neobsahuje 2×2 matici se samými jedničkami a ani 2×2 matici se samými nulami jako diagonální podmatici. *Matice A o rozměrech $n \times n$ je diagonální podmaticí matice B o rozměrech $N \times N$, pokud existuje $R \subseteq \{1, \ldots, N\}$, $|R| = n$, taková, že vybráním řádků a sloupců matice B s indexy z R získáme matici A.*

(c) Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo $DM(n)$ takové, že každá $\{0,1\}$-matice s rozměry $DM(n) \times DM(n)$ obsahuje $n \times n$ diagonální podmatici, která má všechny prvky na diagonále totožné, všechny prvky nad diagonálou totožné a také všechny prvky pod diagonálou totožné.

Příklad 5. *Nechť $M(n)$ označuje počet permutací množiny $[n]$, které neobsahují aritmetickou posloupnost délky tři (3AP).*

(a) Ukažte, že pro každé přirozené n platí $M(n) > 0$. Neboli dokažte, že pro každé n jde najít permutaci $[n]$, která neobsahuje 3AP.

(b) Ukažte, že dokonce platí $M(n) \geq 2^{n-1}$ pro každé n. Neboli počet permutací, které se vyhýbají 3AP, dokonce roste exponenciálně rychle.

(c) Ukažte, že v každé permutaci všech přirozených čísel už vždy najdeme 3AP.

Příklad 6 (*). *Vzpomeňte si na důkaz Ramseyovy věty pro grafy a zkuste s její pomocí dokázat Ramseyovu větu pro hypergrafy.*

Příklad 7 (*). *Zkuste pro každé přirozené $k \geq 2$ dokázat co nejlepší dolní odhad pro $R_2(k,k)$, tedy najděte co největší $N = N(k)$ takové, že existuje 2-obarvení hran K_N bez jednobarevné kopie K_k.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/