Základy kombinatoriky a teorie grafů — 10. cvičení*

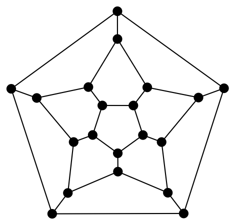
23. dubna 2018

1 Hamiltonovské kružnice

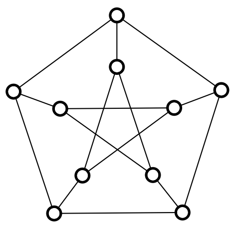
Kružnice v grafu G, která prochází všemi vrcholy G, se nazývá *hamiltonovská.* Podobně cesta v G, která prochází všemi vrcholy G, se nazývá *hamiltonovská.* Graf, který obsahuje hamiltonovskou kružnici, nazveme *hamiltonovský.*

Z přednášky víme, že graf G na n vrcholech je hamiltonovský, pokud je minimální stupeň G aspoň $n/2$ nebo pokud pro každé dva vrcholy u a v z G, které nejsou spojené hranou, platí $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n$.

Příklad 1. *Nalezněte hamiltonovskou kružnici pro pravidelný dvanáctistěn.*



Příklad 2. *Dokažte, že Petersenův graf nemá hamiltonovskou kružnici.*



Příklad 3. *Nechť $n \geq 3$ je přirozené číslo a nechť $f(n)$ označuje maximální počet hran v grafu na n vrcholech, který není hamiltonovský. Ukažte, že $f(n) = \binom{n-1}{2} + 1$.*

Příklad 4. *(a) Nechť G je graf, ve kterém jsou všechny stupně liché. Dokažte, že potom každá hrana G je obsažena v sudém počtu hamiltonovských kružnic.*

Nápověda: Pro danou hranu $\{u, v\}$ uvažte vhodný graf H, jehož možinou vrcholů je množina hamiltonovských cest v G, které začínají hranou $\{u, v\}$. Hrany v H definujte tak, aby cesty rozšiřitelné na hamiltonovské cykly měly lichý stupeň.

(b) Dokažte, že každý 3-regulární hamiltonovský graf obsahuje aspoň tři hamiltonovské kružnice.

Příklad 5. *Pro která n lze úplný graf K_n rozložit na hranově disjunktní*

(a) hamiltonovské kružnice?

(b) hamiltonovské cesty?

(c) Dokažte, že pro každé $n \geq 1$ lze úplný graf K_n rozložit na hranově disjunktní cesty různé délky.

Příklad 6. *Orientovaný graf G je* silně souvislý, *pokud pro každé jeho dva vrcholy u a v existují orientované cesty z u do v a z v do u.*

(a) Ukažte, že orientovaný graf je silně souvislý právě tehdy, když existuje alespoň jedna hrana opouštějící každou neprázdnou podmnožinu vrcholů $X \subset V$.

(b) Ukažte, že každý turnaj *(orientace úplného grafu) je silně souvislý právě tehdy, když obsahuje orientovaný Hamiltonovský cyklus.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/