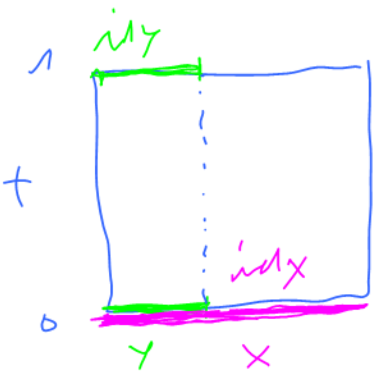
- **HOMOTOPIE**:

(1)

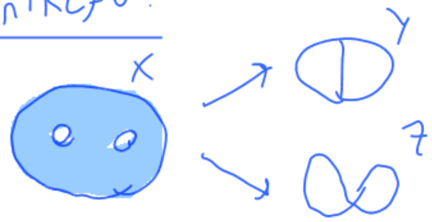
- POJEM PRO ROZLIŠENÍ 2 TOPOLOGICKÝCH PROSTORŮ, KTERÝ JE HRUBŠÍ NEŽ HOMEOMORFISMUS, ALE DÁ SE LÉPE SPOČÍTAT

- NAPŘ.:  - TYTO 2 TOPOLOGICKÉ PROSTORY JSOU HOMOTOPICKÉ (STÁHNOUT TLUSTŠÍ A)

- 2 PROSTORY **X** A **Y**, $Y \subseteq X$, POTOM Y JE **(SILNÝM) DEFORMAČNÍM RETRAKTEM** X, POKUD $\exists$ SPOJITÉ **F**: $X \times [0,1] \to X$ TAKOVÉ, ŽE:
  1) $F(*,0) = id_X$
  2) $F(*,1) \subseteq Y$
  3) $F(y,t) = y$ PRO $\forall$ $t \in [0,1]$, $y \in Y$



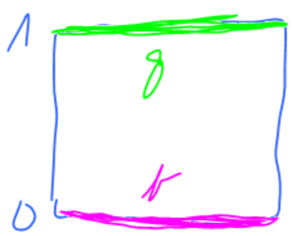
- PŘÍKLAD:



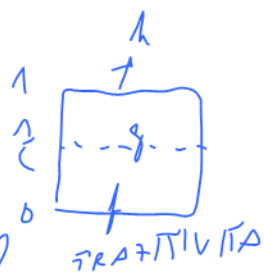
- Y, Z JSOU DEFORMAČNÍ RETRAKTY X, ALE ANI Y NENÍ DEF. RETR. Z A ANI OBRÁCENĚ

- MY ALE CHCEME EKVIVALENCI

- **HOMOTOPIE ZOBRAZENÍ**: **X**, **Y** TOP. PROSTORY (NE NUTNĚ $Y \subseteq X$)
  - **f, g**: $X \to Y$ SPOJITÁ ZOBRAZENÍ, JSOU **HOMOTOPICKÉ**, POKUD $\exists$ SPOJITÉ **H**: $X \times [0,1] \to Y$
  - f A g JSOU TAKOVÉ, ŽE
    1) $H(*,0) = f$
    2) $H(*,1) = g$



- H = **HOMOTOPIE** MEZI f A g



- HOMOTOPIE JE EKVIVALENCE
  ↳ NA TŘÍDĚ VŠECH ZOBRAZENÍ $X \to Y$

- "f A g JSOU HOMOTOPICKÉ" = $f \simeq g$
  - **[X, Y]** = MNOŽINA TŘÍD EKVIVALENCE Z X DO Y
- f JE **NULLHOMOTOPICKÉ**, POKUD $f \simeq g$, KDE $g(x) = y_0$ PRO $\forall x \in X$, $y_0 \in Y$

HOMOTOPICKÁ EKVIVALENCE MEZI PROSTORY: (2)

- prostory X a Y jsou **HOMOTOPICKY EKVIVALENTNÍ**, pokud $\exists$ spojitá zobrazení $f: X \to Y$ a $g: Y \to X$ taková, že pro $f \circ g: Y \to Y$ a $g \circ f: X \to X$ platí $f \circ g \simeq id_Y$, $g \circ f \simeq id_X$

  ↳ s rovností by to byl homeomorfismus

- zapsáno $X \simeq Y$

$\nexists$ bijekce $X \to Y$

PŘÍKLAD: $X = B^d \simeq Y = \{0\}$ (což není homeomorfismus)

$f: X \to Y$ má $x \mapsto 0$, $g: Y \to X$ má $0 \mapsto 0$, $\underbrace{f \circ g}_{\text{?}} = id_Y$, $\underbrace{g \circ f}_{\simeq id_X}$ má $0 \mapsto 0$

- $X \simeq Y \Leftrightarrow \exists Z$ takový, že X a Y jsou deformační retrakty Z
  - $\Leftarrow$ snadné - X def. retr. $Z \Rightarrow X \xrightarrow{\text{inkluze}} Z$, def. retr. $\rho: Z \times [0,1] \to Z$ pro $t=1$
    - potom složení vznikne z $\rho(*,1)$ od id_Z a složení $\rho(*,1)$ z inkluze je id_X
  - $\Rightarrow$ obtížné

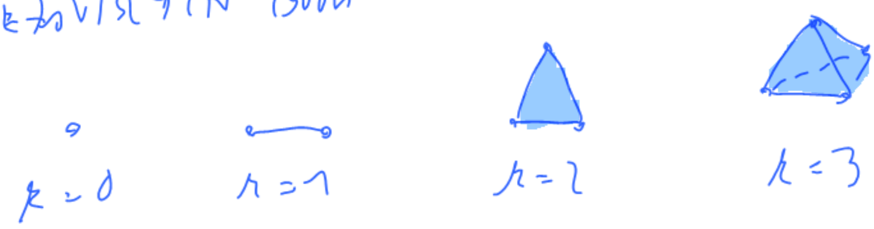
- X je **KONTRAKTIBILNÍ**, pokud je homotopicky ekvivalentní bodu
  ↳ mohou být divoké - Bingův dům
- rozhodnout $X \simeq Y$ je těžký problém

SIMPLICIÁLNÍ KOMPLEXY:

- spousta zajímavých prostorů lze složit pomocí přelepení spousty (jednoduchých) dílků (simplexů)

k-simplex

- **k-ROZMĚRNÝ SIMPLEX** = konvexní obal $(k+1)$ afinně nezávislých bodů
- **STĚNA** - konvexní obal podmnožiny vrcholů simplexu
- **VRCHOLY**, **HRANY**, **FACETY**



- GEOMETRICKÝ SIMPLICIÁLNÍ KOMPLEX:

(3)

= SOUBOR SIMPLEXŮ V $\mathbb{R}^n$ (PRO VHODNÉ d) SPLŇUJÍCÍ:

NEPRÁZDNÝ

1) ∀ STĚNA ∀ SIMPLEXU TOHOTO SOUBORU OPĚT PATŘÍ DO KOMPLEXU
2) PRŮNIK ∀ 2 SIMPLEXŮ Z TOHOTO KOMPLEXU JE STĚNOU TĚCHTO SIMPLEXŮ

- PŘÍKLADY:

a) SIMPLEX (I SE SVÝMI STĚNAMI):

, $\emptyset$

TAKÉ STĚNA

b)  + STĚNY

c)  - NENÍ SIMPLICIÁLNÍM KOMPLEXEM

d) GRAFY JSOU 1-ROZMĚRNÉ SIMPLICIÁLNÍ KOMPLEXY

- DIMENZE $\dim(\Delta)$ SIMPLICIÁLNÍHO KOMPLEXU $= \max\{\dim(S) :$ S SIMPLEX V $\Delta\}$
    - $\dim(\Delta) = -1$ PRO $\Delta = \{\emptyset\}$
    - $\dim(\Delta) = 0 \iff \Delta =$ SOUBOR BODŮ

- BUDEME TYPICKY UVAŽOVAT KONEČNÉ SIMPLICIÁLNÍ KOMPLEXY

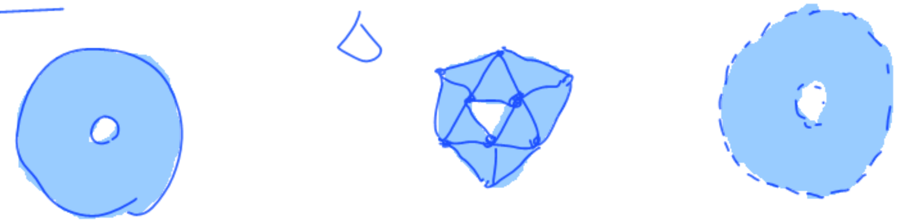
- PODKOMPLEX SIMP. KOMPLEXU Δ JE PODMNOŽINA Δ, KTERÁ JE SIMPLICIÁLNÍM KOMPLEXEM

- $|\Delta|$ = SJEDNOCENÍ SIMPLEXŮ V SIMP. KOMPLEXU Δ
    - NOSNÝ PROSTOR

– TRIANGULACE TOPOLOGICKÉHO PROSTORU:

– X TOP. PROSTOR, SIMP. KOMPLEX Δ JE TRIANGULACÍ X,
POKUD $|\Delta| \cong X$

– PŘÍKLAD:

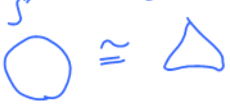
X  Δ

JINÁ TRIANGULACE, ALE NEKONEČNÁ

– TRIANGULACE SFÉRY:

– S^n LZE ZÍSKAT JAKO TRIANGULACE POMOCÍ $(n+1)$-SIMPLEXU σ^{n+1}, ZE KTERÉHO VEZMEME HRANICI $\partial\sigma^{n+1} = \{V$ STĚNA $\sigma^{n+1} : V \neq \sigma^{n+1}\}$

$S^1 \cong \partial\sigma^2$



– JINÁ TRIANGULACE POMOCÍ KŘÍŽOVÉHO MNOHOSTĚNU – JE
$\mathrm{conv}(\{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\})$
SYMETRICKÝ PODLE POČÁTKU
$e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$
– STAČÍ OPĚT VZÍT HRANICI

S^1

– SIMPLICIÁLNÍ KOMPLEXY MAJÍ KOMBINATORICKÝ POPIS

– ABSTRAKTNÍ SIMPLICIÁLNÍ KOMPLEXY:

= DVOJICE (V, K), KDE V = MNOŽINA VRCHOLŮ,
$K \subseteq 2^V$ SPLŇUJE DĚDIČNOST: $A \in K$,
$B \subseteq A \Rightarrow B \in K$

– ČASTO $V = \bigcup K \Rightarrow$ STAČÍ PSÁT K NAMÍSTO (V, K)

– PRVKY K = STĚNY K

– PŘÍKLAD:

$\rightarrow$ $V = \{1, 2, 3, 4\}$
$K = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}\}$

5

– NA DRUHOU STRANU JE I PŘEVOD ABSTRAKTNÍ → GEOMETRICKÝ

– SIMPLEX VE VELKÉ DIMENZI $(|V|-1)$ A VYBRAT STĚNY PODLE K → GEOMETRICKÁ REALIZACE K

– $\|K\|$ = NOSNÝ PROSTOR GEOMETRICKÉ REALIZACE K

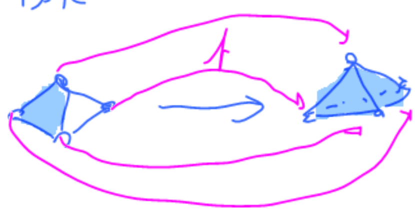
– TVRZENÍ: NOSNÉ PROSTORY GEOMETRICKÝCH REALIZACÍ JSOU HOMEOMORFNÍ

– DŮKAZ SI NASTUDUJTE

– $\dim(K) = \max\{|F| - 1 : F \in K\}$

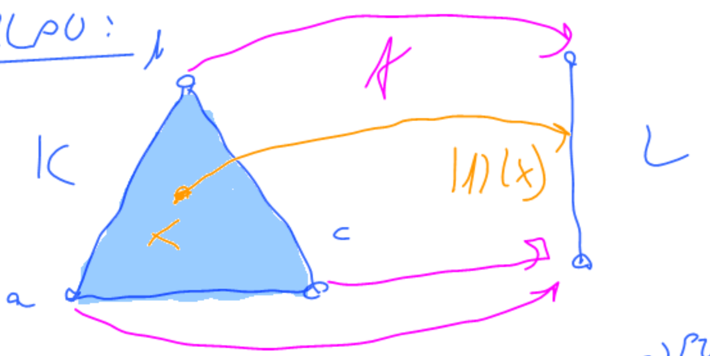
- MINULE JSME SI DEFINOVALI SIMPLICIÁLNÍ KOMPLEXY (GEOMETRICKÉ I ABSTRAKTNÍ)

- **SIMPLICIÁLNÍ ZOBRAZENÍ**:
  - ABSTRAKTNÍ SIMPLICIÁLNÍ KOMPLEXY **K**, **L**
  - **SIMPLICIÁLNÍ ZOBRAZENÍ** JE ZOBRAZENÍ $f: V(K) \to V(L)$ TAKOVÉ, ŽE PRO $\forall A \in K$ PLATÍ $f(A) \in L$
    - ZOBRAZENÍ ZACHOVÁVAJÍCÍ STĚNY
    - NA GRAFECH ODPOVÍDÁ HOMOMORFISMU, KDE DO VÝSLEDNÉHO GRAFU PŘIDÁME SMYČKY
    - KOMBINATORICKÝ ANALOG SPOJITÉHO ZOBRAZENÍ
    - k-SIMPLEX V K SE ZOBRAZÍ NA l-SIMPLEX V L, $l \leq k$
  - BIJEKTIVNÍ SIMPLICIÁLNÍ ZOBRAZENÍ f SE SIMPLICIÁLNÍM f^{-1} (ZNAČENÍ $K \cong L$) SE NAZÝVÁ **ISOMORFISMUS** K A L
    - „K A L SE LIŠÍ AŽ NA PŘEJMENOVÁNÍ VRCHOLŮ" (OBČAS MEZI TAKOVÝMI K A L NEBUDEME ROZLIŠOVAT)
    - PŘÍKLAD:



f JE SIMPLICIÁLNÍ BIJEKTIVNÍ ZOBRAZENÍ, ALE f^{-1} NENÍ SIMPLICIÁLNÍ

- PRO SIMPLICIÁLNÍ $f: V(K) \to V(L)$ CHCEME MÍT ODPOVÍDAJÍCÍ ZOBRAZENÍ $\|f\|: |K| \to |L|$
- PŘÍKLAD:



- KAM ZOBRAZIT x?

$$x = t_1 \cdot a + t_2 \cdot b + t_3 \cdot c$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = 1$$

$$t_1, t_2, t_3 \geq 0$$

$\Rightarrow$ POLOŽÍME $\|f\|(x) = t_1 f(a) + t_2 f(b) + t_3 f(c)$

- GEOMETRICKÉ SIMPLICIÁLNÍ KOMPLEXY Δ_1, Δ_2 A ODPOVÍDAJÍCÍ ABSTRAKTNÍ SIMPLICIÁLNÍ KOMPLEXY K_1, K_2

$f: V(K_1) \to V(K_2)$ SIMPLICIÁLNÍ ZOBRAZENÍ

PRO $\forall$ SIMPLEX $\sigma \in \Delta_1$ DEFINUJME ZOBRAZENÍ $|f|_\sigma : \sigma \to |\Delta_2|$,

$\sigma = [v_1, \dots, v_{\dim(\sigma)+1}]$

KDE $\forall\, x = \sum_{i=1}^{\dim(\sigma)+1} t_i v_i$ SE ZOBRAZÍ NA $|f_\sigma|(x) = \sum_{i=1}^{\dim(\sigma)+1} t_i f(v_i)$

VYUŽÍT FAKTU, ŽE PŘI PRŮNIKU STĚN → ABS. POJMY SIMP. KOMPLEXU SPLŇUJÍ (PŘI ABSTRAKCI!)

- PRO $\sigma, \tau \in \Delta_1$ SE $|f_\sigma|$ A $|f_\tau|$ SHODUJÍ NA $\sigma \cap \tau$

- DEFINUJME $|f| : |\Delta_1| \to |\Delta_2|$ TAK, ABY $|f| = |f_\sigma|$ NA $\forall\, \sigma \in \Delta_1$ → AFINNÍ ROZŠÍŘENÍ f

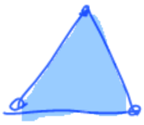
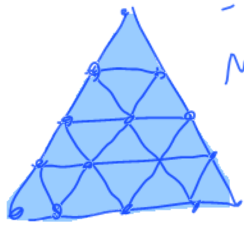
- TVRZENÍ: $|f| : |\Delta_1| \to |\Delta_2|$ SPOJITÉ PRO SIMPLICIÁLNÍ ZOBRAZENÍ f. JE-LI f PROSTÉ, PAK JE $|f|$ PROSTÉ A JE-LI f IZOMORFISMUS, PAK JE $|f|$ HOMEOMORFISMUS

→ SIMP. KOMPLEXY URČENY AŽ NA HOMEOMORFISMUS JEDNOZNAČNÝ TOP. PROSTOR

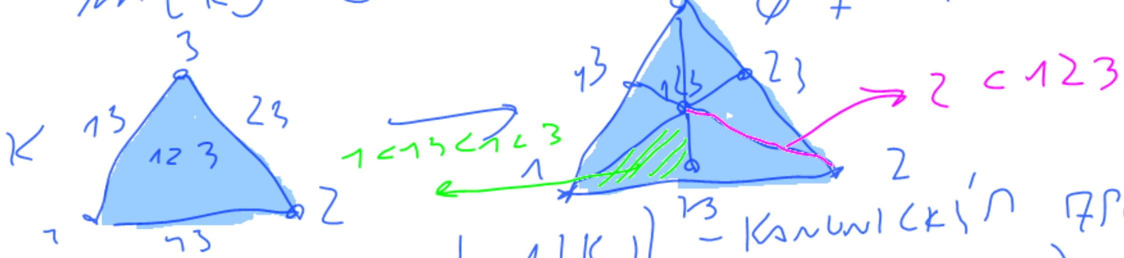
PODLE CVIČENÍ Z 1. SÉRIE (JE-LI f SPOJITÉ NA $\forall$ UZAVŘENÉM ZÚŽENÍ, PAK JE SPOJITÉ V CELÉM PROSTORU)

- DK (NÁZNAK):
  - f ZOBRAZUJE SIMPLEXY NA SIMPLEXY STEJNÉ DIMENZE ⇒ $|f|$ PROSTÉ
  - f IZOMORFISMUS ⇒ $|f^{-1}| = |f|^{-1}$ ⇒ $|f|^{-1}$ PROSTÉ A SPOJITÉ ⇒ $|f|$ HOMEOMORFISMUS ⊠

- K abstr. simp. komplex, O_1 a O_2 geometrické realizace (8)
  a $\mu: V(K) \to V(K)$ daný, že $|\mu| : |O_1| \to |O_2|$ je homeomorfismus
  ⇒ geometrické reprezentace abs. simp. komplexu jsou homeomorfní

- **Barycentrické podrozdělení:**
  - chceme umět zjemňovat triangulace ↗ aproximace spojitých zobrazení
  - příklad:  - uvážíme podrozdělení  - v 3D ale už nedostaneme jen simplexy

  ⇒ zvolíme jiný postup - barycentrické podrozdělení (není tak efektivní)
  - příklad:  - těžiště do ∀ simplexu
  - pro geometrické simp. komplexy viz 2. série DÚ
    - definice a vlastnosti
  - pro abstraktní simpliciální komplex K:
    - barycentrické podrozdělení $sd(K)$ je abs. simp. komplex s $V(sd(K)) = K \setminus \emptyset$ a
      $sd(K) = \{\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} : \sigma_1, \dots, \sigma_k \in K, \emptyset \neq \sigma_1 \subsetneq \sigma_2 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_k\}$



- kanonickým přísunem (viz 2. série)
- platí $|K| \cong |sd(K)|$
- příklad simplexů při opakování kroků (2. série)