– ŘEŠENÍ KOMBINATORICKÝCH PROBLÉMŮ POMOCÍ METOD Z TOPOLOGIE

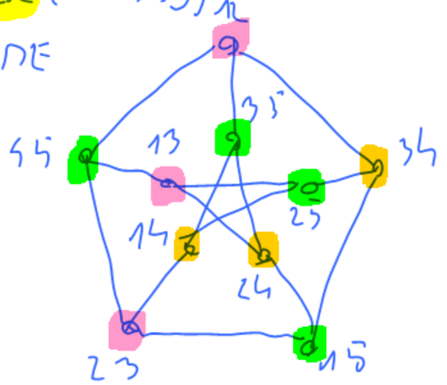
– BAREVNOST KNESEROVÝCH GRAFŮ:

– $m, k \in \mathbb{N}$, $m \geq k$

– KNESERŮV GRAF $KG_{m,k} = \left(\binom{\{1,\dots,m\}}{k}, \{\{A,B\} : A \cap B = \emptyset\} \right)$

– JAKÁ JE BAREVNOST $\chi(KG_{m,k})$? (KNESER (1955))

– ZDE PŘIDÁME PODMÍNKU $m \geq 2k$, JINAK MÁME PRÁZDNÝ GRAF



$KG_{5,2} \cong$ KNESERŮV GRAF

$\chi(KG_{5,2}) = 5 - 2 \cdot 2 + 2 = \underline{\underline{3}}$

– POMĚRNĚ SNADNO SE DÁ UKÁZAT $\chi(KG_{m,k}) \leq$
$\leq m - 2k + 2$ (CVIČENÍ)

– DOLNÍ ODHAD JE MNOHEM TĚŽŠÍ

– PLATÍ $\chi(KG_{m,k}) \geq m - 2k + 2$

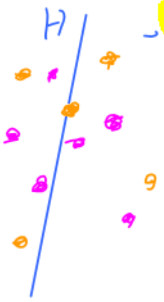
– KNESEROVU OTÁZKU ZODPOVĚDĚL LOVÁSZ (1978) POMOCÍ TOPOLOGICKÝCH METOD

↳ ZAČÁTEK JEJICH POUŽITÍ V KOMBINATORICE

(ZLOMKOVÉ CHROMATICKÉ ČÍSLO $KG_{m,k}$ JE MNOHEM MENŠÍ NEŽ $\chi(KG_{m,k})$)

↳ $\frac{m}{k}$

– JINÉ APLIKACE TOPOLOGICKÝCH METOD:



– VĚTA O SENDVIČI

$\forall$ KONEČNÉ $A_1, \dots, A_d \subseteq \mathbb{R}^d$ $\exists$ NADROVINA H PŮLÍCÍ $\forall A_i$

↗ OTEVŘENÝ POLOPROSTOR URČENÝ H OBSAHUJE $\leq \lfloor \frac{|A_i|}{2} \rfloor$ BODŮ Z A_i

– DĚLENÍ KONVEXNÍCH TĚLES:

– DÁNO $m \in \mathbb{N}$, $K \subseteq \mathbb{R}^2$ KONVEXNÍ TĚLESO, CHCEME ROZŘEZAT K NA m KONVEXNÍCH ČÁSTÍ SE STEJNÝM OBSAHEM A OBVODEM

– VYŘEŠENO (2018) – VŽDY LZE

ZÁKLADY OBECNÉ TOPOLOGIE:

- **TOPOLOGICKÝ PROSTOR** = (X, σ), KDE X JE MNOŽINA A $\sigma \subseteq 2^X$ SPLŇUJE
  - i) $\emptyset, X \in \sigma$
  - ii) $U_1, \dots, U_t \in \sigma \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{t} U_i \in \sigma$ (UZAVŘENOST NA KONEČNÉ PRŮNIKY)
  - iii) $U_i \in \sigma$ PRO $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \sigma$ (UZAVŘENOST NA SJEDNOCENÍ)
  - ZACHYCENÍ POJMŮ „BLÍZKOSTI" A „SPOJITOSTI" NA VELMI OBECNÉ ÚROVNI
  - **OTEVŘENÉ MNOŽINY** = PRVKY σ
  - $F \subseteq X$ JE **UZAVŘENÁ**, POKUD $X \setminus F \in \sigma$

- PŘÍKLADY:
  - STANDARDNÍ TOPOLOGIE V $\mathbb{R}^d$ – $(\mathbb{R}^d, \sigma)$, $\sigma = \{U \subseteq \mathbb{R}^d : \forall x \in U \; \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq U\}$
    ↳ KOULE SE STŘEDEM V x A POLOMĚREM ε
  - ANALOGICKY V METRICKÝCH PROSTORECH
  - **DISKRÉTNÍ TOPOLOGICKÝ PROSTOR** – $(X, \sigma = 2^X)$
    ↳ KONEČNÝ

- OBECNÁ DEFINICE – MOHOU EXISTOVAT I EXOTICKÉ PŘÍKLADY
- MY SE OMEZÍME NA **HAUSDORFFOVY PROSTORY** = TOPOLOGICKÉ PROSTORY (X, σ), KDE $\forall x, y \in X,\ x \neq y\ \exists U_x, U_y \in \sigma : x \in U_x$ A $y \in U_y$, $U_x \cap U_y = \emptyset$

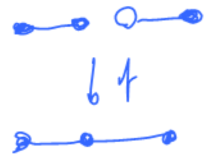
- (X, σ) TOPOLOGICKÝ PROSTOR, $Y \subseteq X$, POTOM $(Y, \{U \cap Y : U \in \sigma\})$ JE **PODPROSTOREM** PROSTORU (X, σ)
  - PŘÍKLAD:

    UZAVŘENÁ ← $Y \subseteq \mathbb{R}^d$, $(\mathbb{R}^d, \sigma)$ STANDARDNÍ TOPOLOGIE ⇒ OTEVŘENÉ NEJSOU OTEVŘENÉ MNOŽINY V $(Y, \{Y \cap U : U \in \sigma\})$ V $\mathbb{R}^d$

- ODTEĎ BUDEME TOPOLOGICKÝ PROSTOR (X, σ) ZNAČIT JEN JAKO X

- **SPOJITÁ ZOBRAZENÍ**:
  - (X, σ), (Y, σ') topologické prostory, zobrazení $f: X \to Y$ je **SPOJITÉ**, pokud $\forall U \in \sigma'$: $f^{-1}(U) \in \sigma$
  - ve standardní topologii ekvivalentní s ε, δ-definicí (cvičení)
  - budeme uvažovat jen spojitá zobrazení!

- **HOMEOMORFISMUS**:
  - X a Y topologické prostory, zobrazení $f: X \to Y$ je **HOMEOMORFISMUS**, je-li f bijekce a f^{-1} je spojitá
  (∃ spojité bijekce bez spojité inverzní funkce)



  - $X \cong Y$ značí „X a Y jsou **HOMEOMORFNÍ**"
    ↳ ∃ mezi nimi homeomorfismus
    - $\cong$ je ekvivalence

- X topologický prostor, $Y \subseteq X$, potom **UZÁVĚR** $\overline{Y}$ (případně $cl(Y)$) množiny Y je průnik $\forall$ uzavřených množin, které obsahují Y
- **HRANICE** množiny Y, značená ∂Y, je definovaná jako $\overline{Y} \cap \overline{X \setminus Y}$
  ↳ případně $bd\, Y$

- VNITŘEK Y, značený $int\, Y$ $= \overline{Y} \setminus \partial Y$
  - alternativně $int\, Y = \{ y \in Y : \exists U_y \subseteq Y$ otevřená, $y \in U_y \}$

- v $\mathbb{R}^d$: $dist(x, A) = \inf\{dist(x,a) : a \in A\}$
  - $\overline{Y} = \{x \in X : dist(x, Y) = 0\}$
  - $\partial Y = \{x \in X : dist(x, Y) = 0 = dist(x, X \setminus Y)\}$
  - $int\, Y = \{x \in X : dist(x, X \setminus Y) > 0\}$

④

- KOMPAKTNOST:
  - TOPOLOGICKÝ PROSTOR (X, σ) JE KOMPAKTNÍ, POKUD LZE Z $\forall$ OTEVŘENÉHO POKRYTÍ X VYBRAT KONEČNÉ PODPOKRYTÍ X
    $\hookrightarrow \mathcal{U} \subseteq \sigma, \; \cup \mathcal{U} = X$
  - MNOŽINA JE KOMPAKTNÍ, JE-LI KOMPAKTNÍ JAKO PODPROSTOR
  - V $\mathbb{R}^d$:
    MNOŽINA JE KOMPAKTNÍ $\Leftrightarrow$ JE OMEZENÁ A UZAVŘENÁ
    (HEINE-BORELOVA VĚTA) $\quad$ $\hookrightarrow$ NAPŘ. $B^d = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\}$
    $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$
    - OBECNĚ NEPLATÍ (V METRICKÝCH PROSTORECH)
  - KOMPAKTNÍ $\Rightarrow$ UZAVŘENÁ
  - X KOMPAKTNÍ TOPOLOGICKÝ PROSTOR, $f: X \to \mathbb{R}$ SPOJITÁ $\Rightarrow$
    $\Rightarrow f$ NABÝVÁ NA X SVÉHO MAXIMA \ MINIMA

- TVRZENÍ 1:
  X, Y TOPOLOGICKÉ PROSTORY, $f: X \to Y$ SPOJITÉ, $K \subseteq X$ KOMPAKTNÍ $\Rightarrow f(K)$ JE KOMPAKTNÍ
  - DK:
    $\mathcal{U}$ = OTEVŘENÉ POKRYTÍ Y $\xRightarrow{\text{SPOJITOST}}$ $f^{-1}(\mathcal{U})$ JE OTEVŘENÉ POKRYTÍ X $\xRightarrow{\text{KOMPAKTNOST}}$ OBSAHUJE KONEČNÉ PODPOKRYTÍ $f^{-1}(\mathcal{U}')$ X $\Rightarrow$ KONEČNÉ PODPOKRYTÍ $\mathcal{U}'$ Y $\boxtimes$

- SOUVISLOST:
  - TOPOLOGICKÝ PROSTOR JE SOUVISLÝ, POKUD HO NELZE ZAPSAT JAKO DISJUNKTNÍ SJEDNOCENÍ Z NEPRÁZDNÝCH OTEVŘENÝCH MNOŽIN

- **Křivková souvislost**: topologický prostor je **křivkově souvislý**, pokud $\forall x, y \in X$ $\exists$ **křivka** spojující x a y v X

  ↳ $f: [0,1] \to X$ spojitě, $f(0) = x$, $f(1) = y$

- **Oblouková souvislost** – $\forall x, y \in X$ $\exists$ **oblouk** mezi x a y

  $f: [0,1] \to X$, $f(0) = x$, $f(1) = y$

  f homeomorfismus mezi $[0,1]$ a $f([0,1])$ (speciálně je f prosté)

  – v Hausdorffových prostorech splývá s křivkovou souvislostí

křivka, co není oblouk

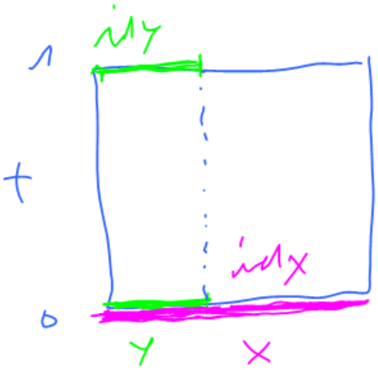
– topologický sinus –

– prostor, který je souvislý, ale není obloukově (křivkově) souvislý

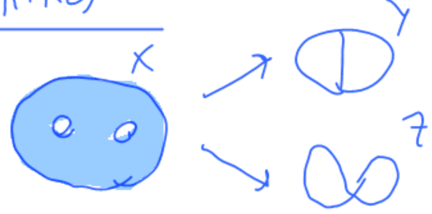
- **HOMOTOPIE**: pojem pro rozlišení 2 topologických prostorů, který je hrubší než homeomorfismus, ale dá se lépe spočítat

- např:  - tyto 2 topologické prostory jsou homotopické (stáhnout tlustší A)

- 2 prostory **X** a **Y**, $Y \subseteq X$, potom Y je **(silným) deformačním retraktem** X, pokud $\exists$ spojité **F**: $X \times [0,1] \to X$ takové, že:
  1) $F(*,0) = id_X$
  2) $F(*,1) \subseteq Y$
  3) $F(y,t) = y$ pro $\forall$ $t \in [0,1]$, $y \in Y$

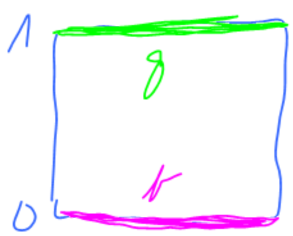


- příklad:

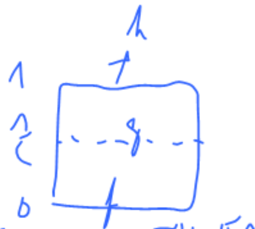


- Y, Z jsou deformační retrakty X, ale ani Y není def. retr. Z a ani obráceně
- my ale chceme ekvivalenci

- **HOMOTOPIE ZOBRAZENÍ**:
  - **X**, **Y** top. prostory (ne nutně $Y \subseteq X$)
  - **f, g**: $X \to Y$ spojitá zobrazení, f a g jsou **homotopická**, pokud $\exists$ spojité **H**: $X \times [0,1] \to Y$ takové, že
    1) $H(*,0) = f$
    2) $H(*,1) = g$



- H = **homotopie** mezi f a g



tranzitivita

- homotopie je ekvivalence na třídě všech zobrazení $X \to Y$
- "f a g jsou homotopické" = $f \simeq g$
- **[X,Y]** = množina tříd ekvivalence z X do Y
- f je **nullhomotopické**, pokud $f \simeq g$, kde $g(x) = y_0$ pro $\forall x \in X$, $y_0 \in Y$

Homotopická ekvivalence mezi prostory: (7)

- prostory X a Y jsou **homotopicky ekvivalentní**, pokud $\exists$ spojitá zobrazení $f: X \to Y$ a $g: Y \to X$ taková, že pro $f \circ g: Y \to Y$ a $g \circ f: X \to X$ platí $f \circ g \simeq id_Y$, $g \circ f \simeq id_X$

  ↳ s rovnostmi by to byl homeomorfismus

- zapsáno $X \simeq Y$

příklad: $X = B^d \simeq Y = \{0\}$ (což není homeomorfismus) → $\nexists$ bijekce $X \to Y$

$f: X \to Y$ má $x \mapsto 0$, $g: Y \to X$ má $0 \mapsto 0$, $\underbrace{f \circ g}_{= id_Y}$, $\underbrace{g \circ f}_{\simeq id_X}$ mají $0 \mapsto 0$

- $X \simeq Y \iff \exists Z$ takový, že X a Y jsou deformační retrakty Z

  $\Leftarrow$ snadné – X def. retr. $Z \Rightarrow X \hookrightarrow Z$ (inkluze; def. retr.)

  $p: Z \times [0,1] \to Z$ pro $t = 1$

  $\Rightarrow$ obtížné

  - potom složení vznikne z $p(*,1)$ od id_Z a složení $p(*,1)$ z identity je id_X

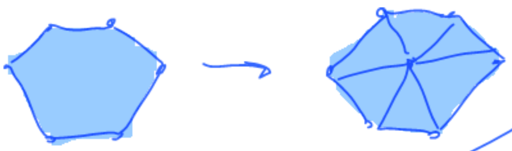
- X je **kontraktibilní**, pokud je homotopicky ekvivalentní bodu

  ↳ mohou být divoké – Bingův dům (bod není jeho deformačním retraktem)

- rozhodnout $X \simeq Y$ je těžký problém

Simpliciální komplexy:

- spousta zajímavých prostorů lze složit pomocí přelepení obecně (jednotlivých) dílků (simplexů)



- **k-rozměrný simplex** = konvexní obal $(k+1)$ afinně nezávislých bodů → **k-simplex**

$k=0$ $k=1$ $k=2$ $k=3$

- **stěna** – konvexní obal podmnožiny vrcholů simplexu
- **vrcholy**, **hrany**, **fazety**

- **GEOMETRICKÝ SIMPLICIÁLNÍ KOMPLEX:**

= SOUBOR SIMPLEXŮ V $\mathbb{R}^d$ (PRO VHODNÉ **d**) SPLŇUJÍCÍ:

NEPRÁZDNÝ

1) ∀ STĚNA ∀ SIMPLEXU TOHOTO SOUBORU OPĚT PATŘÍ DO KOMPLEXU
2) PRŮNIK ∀ 2 SIMPLEXŮ Z TOHOTO KOMPLEXU JE STĚNOU TĚCHTO SIMPLEXŮ

- PŘÍKLADY:

a) SIMPLEX (I SE SVÝMI STĚNAMI):

TAKÉ STĚNA

$\emptyset$

b)  + STĚNY

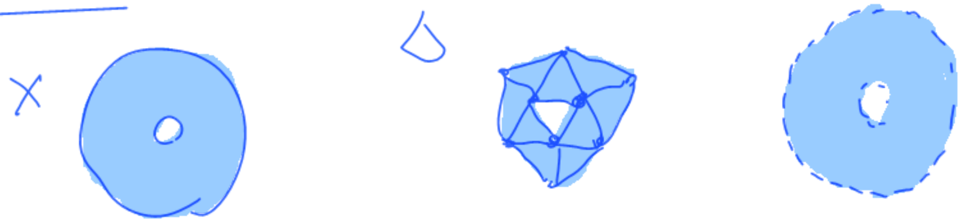
c)  - NENÍ SIMPLICIÁLNÍM KOMPLEXEM

d) GRAFY JSOU 1-ROZMĚRNÉ SIMPLICIÁLNÍ KOMPLEXY

- DIMENZE **$\dim(\Delta)$** SIMPLICIÁLNÍHO KOMPLEXU $= \max\{\dim(S):$ S SIMPLEX V $\Delta\}$
  - $\dim(\Delta) = -1$ PRO **Δ** $= \{\emptyset\}$
  - $\dim(\Delta) = 0 \iff \Delta =$ SOUBOR BODŮ
- BUDEME TYPICKY UVAŽOVAT KONEČNÉ SIMPLICIÁLNÍ KOMPLEXY
- **PODKOMPLEX** SIMP. KOMPLEXU **Δ** JE PODMNOŽINA Δ, KTERÁ JE SIMPLICIÁLNÍM KOMPLEXEM
- **$|\Delta|$** = SJEDNOCENÍ SIMPLEXŮ V SIMP. KOMPLEXU **Δ**
  └ NOSNÝ PROSTOR

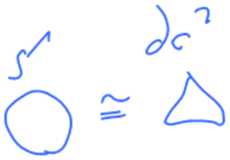
- TRIANGULACE TOPOLOGICKÉHO PROSTORU:
  - X TOP. PROSTOR, SIMP. KOMPLEX Δ JE TRIANGULACÍ X, POKUD $|\Delta| \cong X$

- PŘÍKLAD:



JINÁ TRIANGULACE, ALE NE KONEČNÁ

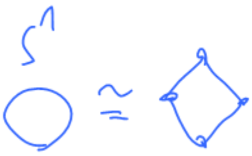
- TRIANGULACE SFÉRY:
  - S^n LZE ZÍSKAT JAKO TRIANGULACE POMOCÍ $(n+1)$-SIMPLEXU σ^{n+1}, ZE KTERÉHO VEZMEME HRANICI $\partial\sigma^{n+1} = \{\nu$ STĚNA $\sigma^{n+1} : \nu \neq \sigma^{n+1}\}$



  - JINÁ TRIANGULACE POMOCÍ KŘÍŽOVÉHO MNOHOSTĚNU – JE SYMETRICKÝ PODLE POČÁTKU
    - STAČÍ OPĚT VZÍT HRANICI

$\text{conv}(\{e_1, -e_1, \ldots, e_d, -e_d\})$

$e_i = (0,\ldots,0,\underset{i}{1},0,\ldots,0)$



- SIMPLICIÁLNÍ KOMPLEXY MAJÍ KOMBINATORICKÝ POPIS

- ABSTRAKTNÍ SIMPLICIÁLNÍ KOMPLEXY:
  = DVOJICE (V,K), KDE V = MNOŽINA VRCHOLŮ, $K \subseteq 2^V$ SPLŇUJE DĚDIČNOST: $A \in K$, $B \subseteq A \Rightarrow B \in K$

  - ČASTO $V = \bigcup K \Rightarrow$ STAČÍ PSÁT K NAMÍSTO (V,K)
  - PRVKY K = STĚNY K

- PŘÍKLAD:

$\rightarrow$ $V = \{1,2,3,4\}$

$K = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}\}$

– NA DRUHOU STRANU JDE i PŘEVOD ABSTRAKTNÍ → GEOMETRICKÝ (10)

– SIMPLEX VE VELKÉ DIMENZI $(|V|-1)$ A

VYBRAT STĚNY PODLE K → **GEOMETRICKÁ REALIZACE K**

– **$|K|$** = NOSNÝ PROSTOR GEOMETRICKÉ REALIZACE K

– **TVRZENÍ**:
NOSNÉ PROSTORY GEOMETRICKÝCH REALIZACÍ JSOU HOMEOMORFNÍ

– DŮKAZ SI NAZNAČÍME

– **$\dim(K)$** $= \max\{|F|-1 : F \in K\}$