

Topologické metody v kombinatorice¹ — 2. série

Homotopie a simplicialní komplexy

zadáno 6.3.2019, odevzdat do 27.3.2019

Příklad 1. Mějme topologické prostory W , X a Y a zobrazení $f_1, f_2: W \rightarrow X$ a $g: X \rightarrow Y$. Dokažte, že pokud jsou f_1 a f_2 homotopická, potom i $g \circ f_1$ a $g \circ f_2$ jsou homotopická. [1]

Příklad 2. Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ mezi dvěma topologickými prostory nazveme nullhomotopické, pokud je homotopické s konstantním zobrazením. Dokažte, že topologický prostor X je kontraktibilní právě tehdy, když pro každý topologický prostor Y a každé spojitě $f: X \rightarrow Y$ je f nullhomotopické. Můžete využít řešení předchozího příkladu. [1]

Příklad 3. Nakreslete triangulaci toru s co možná nejmenším počtem simplexů. Nemusíte dokazovat, že se jedná o nejmenší možný počet. [2]

Příklad 4. Šachovnicový komplex $\check{S}_{m,n}$ je definován tak, že jeho vrcholy jsou pole šachovnice $m \times n$ a jeho stěny jsou takové množiny polí, že žádné dvě neleží ani ve stejném řádku ani ve stejném sloupci (tj., položíme-li na ně věže, tak se navzájem neohrožují). Popište topologicky $\check{S}_{3,4}$, tedy určete, kterému známému topologickému prostoru je $|\check{S}_{3,4}|$ homeomorfní. [3]

Příklad 5. Necht K je simplicialní komplex a necht $\sigma \in K$ je jeho stěna, která je obsažena v jediné maximální $\tau \in K$; $\sigma \subsetneq \tau$. Elementárním kolapsem budeme rozumět operaci, kdy z komplexu K utvoříme komplex K' , jehož vrcholy se shodují s vrcholy K a jehož množinou stěn je množina stěn K bez následující množiny:

$$\{\vartheta \in K \mid \sigma \subseteq \vartheta \subseteq \tau\}.$$

Pořádně dokažte, že K a K' jsou homotopicky ekvivalentní. [3]

Příklad 6. Necht G je bipartitní graf s partitami A a B . Definujme N_A jako simplicialní komplex s množinou vrcholů A a stěnami takovými podmnožinami A , že jejich vrcholy mají společného souseda v B . Simplicialní komplex N_B je definován analogicky. Dokažte, že N_A je homotopicky ekvivalentní N_B . [5]

Řešení tohoto příkladu je možné odevzdávat do **3.4.2019**. Nápověda k tomuto příkladu bude uvedena **27.3.2019**.

¹Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>