

Topologické metody v kombinatorice¹ – 4. série

Aplikace Borsukovy–Ulamovy věty a homologie

zadáno 8.4.2015, nápověda 22.4.2015, odevzdat do 29.4.2015

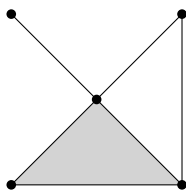
Příklad 1. Necht' $SG(n, k)$ označuje Schrijverův graf, jehož vrcholy jsou stabilní k -tice prvků z množiny $\{1, \dots, n\}$ a jehož dva vrcholy jsou spojené hranou, jsou-li příslušné k -tice disjunktní.

- (a) Ukažte, že ne v každém grafu $SG(n, k)$ mají všechny vrcholy stejné stupně. [2]
- (b) Ukažte, že graf $SG(n, k)$ je vrcholově kritický. Neboli ukažte, že pro každou k -tici $A \in V(SG(n, k))$ existuje $(n-2k+2)$ -obarvení vrcholů $SG(n, k)$, které používá barvu $n-2k+2$ jen na vrcholu z A . [4+nápov]

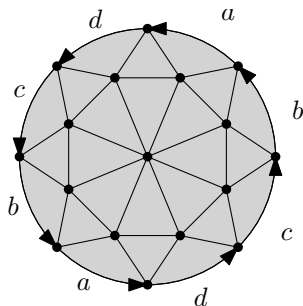
Příklad 2. V následujících příkladech není klíčové, že se jedná o kompaktní podmnožiny \mathbb{R}^2 . U všech příkladů by namísto kompaktních podmnožin mohly vystupovat konečné borelovské míry takové, že každá přímka má nulovou míru.

- (a) Dokažte, že každou kompaktní podmnožinu \mathbb{R}^2 lze rozřezat dvěma přímkami na čtyři části o stejném obsahu. [1]
- (b) Dokažte, že každou kompaktní podmnožinu \mathbb{R}^2 lze rozřezat třemi přímkami procházejícími tímž bodem na šest částí o stejném obsahu. [4+nápov]

Příklad 3. Vypočítejte homologické grupy simplicialního komplexu na obrázku (šedé trojúhelníky náleží do komplexu). Při výpočtu vycházejte přímo z definic (tzn., pokud budete používat i nějaká tvrzení nedokazovaná na přednášce, tak uveďte jejich důkaz). [2]



Příklad 4. Uvažujme triangulaci reálné projektivní roviny jako na obrázku (hrany na okraji jsou identifikované podle příslušných písmen).² Dále uvažujme 1-cyklus $C = a + b + c + d$, kde hrany a, b, c, d jsou zadané s orientacemi vyznačenými na obrázku (ostatní orientace si zvolte podle vlastní potřeby). Dokažte, že C není hranicí žádného 2-řetězce (s celočíselnými koeficienty), avšak najděte 2-řetězec, jehož hranicí je $2C$. [3]



¹Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

²Nicméně konkrétní volba triangulace pro tento příklad není až tak důležitá.