Teorie grafů a algoritmy pro matematiky 1
Zadání domácích úkolů

20. května 2013

1 Zadáno 25. 2. 2013

Říkáme, že grafy G a H jsou *izomorfní*, pokud existuje bijekce $f\colon V(G) \to V(H)$ taková, že platí $\{u,v\} \in E(G)$ právě tehdy, když $\{f(u), f(v)\} \in E(H)$. Neboli grafy jsou isomorfní, pokud se liší jen přejmenováním vrcholů. Graf H je *doplňkem grafu* G, pokud $\{u,v\} \in E(H)$ právě tehdy, když $\{u,v\} \notin E(G)$. Doplněk grafu G obvykle značíme $\overline{G}$.

Příklad 1. *Sestrojte nekonečně mnoho grafů, které jsou izomorfní svému dopňku.* **[3]**

Příklad 2. *Ukažte, že grafy K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné.* **[2]**

Příklad 3. *Mějme rovinné nakreslení grafu, jehož každý vrchol má sudý stupeň. Ukažte, že lze obarvit stěny tohoto nakreslení dvěma barvami tak, že dvě stěny stejné barvy nemají společnou hranu na hranici.* **[2]**

2 Zadáno 11. 3. 2013

Příklad 4. *(Königova věta) Vrcholové pokrytí grafu G je podmnožina vrcholů U taková, že každá hrana G je incidentní aspoň s jedním vrcholem z U. Ukažte, že v každém bipartitním grafu je velikost maximálního párování rovna velikosti minimálního vrcholového pokrytí.* **[2]**

Příklad 5. *Dokažte, že hrany každého rovinného grafu bez trojúhelníků lze zorientovat tak, že z každého vrcholu vedou nejvýše dvě šipky ven.* **[4]**

Příklad 6. *Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M} = \{M_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné k-tice množin z $\mathcal{M}$ aspoň k prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.* **[2]**

3 Zadáno 25. 3. 2013

Příklad 7. *Uvažujme graf Q_n (graf n-dimenzionální krychle), jehož vrcholy tvoří množinu $\{0,1\}^n$ a hrany spojují vrcholy lišící se právě v jedné souřadnici. Na grafu Q_n uvažujme síť se zdrojem $z = (0,0,...,0)$ a stokem $s = (1,1,...,1)$, kde všechny hrany mají jednotkovou kapacitu. Sestrojte*

(a) celočíselný maximální tok. **[1]**

(b) maximální tok, který je na všech hranách kladný. **[1]**

Příklad 8. *Pro přirozené číslo $k \geq 2$ ukažte, že v k-souvislém grafu leží každých k vrcholů na společném cyklu.* **[4]**

Příklad 9. *Pro grafy $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ označme jako $G_1 \times G_2$ graf s množinou vrcholů $V_1 \times V_2$, kde vrcholy (u, u') a (v, v') jsou spojené hranou, pokud $\{u, v\} \in E_1$ a $\{u', v'\} \in E_2$. Ukažte, že pro cykly C_1 a C_2 je graf $C_1 \times C_2$ je souvislý právě tehdy, když nejsou oba sudé.* **[2]**

4 Zadáno 7. 4. 2013

Příklad 10. *Pro která n lze úplný graf K_n rozložit na hranově disjunktní*

(a) hamiltonovské kružnice? . **[1]**

(b) hamiltonovské cesty?. **[1]**

Příklad 11. *Dokažte, že v hranově 2-souvislém grafu leží každý vrchol na nějaké kružnici.* **[1]**

Příklad 12. *Dokažte, že hrany každého grafu lze zorientovat tak, že vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu se liší nejvýše o jedna.* **[2]**

Příklad 13. *Pro každou dvojici přirozených čísel n, k, která splňuje podmínky $n \geq k+1$ a $2 \mid kn$, sestrojte k-regulární graf na n vrcholech.* **[4]**

Příklad 14. *Dokažte, že pro každé $n \geq 1$ lze úplný graf K_n rozložit na hranově disjunktní cesty různé délky.* **[2]**

Příklad 15. *Dokažte, že K_n lze rozložit na hranově disjunktní cesty délky 2 právě tehdy, když $n = 4k$ nebo $n = 4k+1$ pro $k \in \mathbb{N}$.* **[3]**

Pro $k \in \mathbb{N}$ je podgraf $H \subseteq G$ k-faktorem grafu G, pokud $V(H) = V(G)$ a H je k-regulární.

Příklad 16. *Které $2k$-regulární grafy mají k-faktor?* **[2]**

Příklad 17. *Dokažte, že každý $2k$-regulární graf má 2-faktor.* **[3]**

5 Zadáno 22. 4. 2013

Příklad 18. *Nakreslete na torus (povrch pneumatiky) graf $K_{3,6}$ bez křížení hran.* **[1]**

Příklad 19. *Dokažte, že každý rovinný graf, jehož vrcholy mají všechny stupně alespoň 5, má alespoň 12 vrcholů.* **[2]**

Příklad 20. *Dokažte, že následující grafy nelze nakreslit na torus bez křížení hran:*

(a) K_8, **[2]**

(b) $K_{4,5}$, $K_{3,7}$. **[2]**

Můžete k tomu použít variantu Eulerovy formule pro torus: $e \leq v + f$ (rovnost by platila pro nakreslení souvislých grafů, kde každá stěna je rovinná).

Příklad 21. *Nechť máme rovinné nakreslení grafu G, ve kterém jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme, že vrcholy G jsou obarveny třemi barvami. Ukažte, že počet stěn, na jejichž vrcholech jsou použity všechny tři barvy, je sudý.* **[3]**

Příklad 22. *Vnějškově rovinný graf je graf, který má takové rovinné nakreslení, v němž jsou všechny vrcholy na vnější stěně. Dokažte bez použití Věty o čtyřech barvách, že každý vnějškově rovinný graf je 3-obarvitelný.* **[4]**

Příklad 23. *Nalezněte rovinný graf (a seznamy povolených barev), který není 4-vybíratelný.* **[3]**

6 Zadáno 6. 5. 2013

Příklad 24. *Najděte obarvení roviny 7 barvami tak, aby žádné dva body ve vzdálenosti 1 neměly stejnou barvu.* **[2]**

Příklad 25. *Dokažte platnost nerovnosti $R_k(3, \ldots, 3) \leq \lfloor e \cdot k! \rfloor + 1$.* **[3]**

Příklad 26. *Pomocí generujících funkcí sestrojte dvojici falešných (tzn. ne pravých) šestistěnných kostek takových, že každá z kostek má na svých stěnách celkem 6 přirozených čísel (čísla se mohou opakovat a kostky mohou být různé), a pro každé přirozené k platí: pravděpodobnost, že při hodu oběma kostkami bude součet padlých čísel k, je stejná jako pro dvojici pravých kostek (které mají čísla $1, 2, 3, 4, 5, 6$). I u falešných kostek předpokládáme, že každá stěna padne se stejnou pravděpodobností.* **[2]**

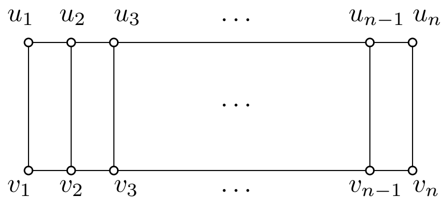
Příklad 27. *Spočítejte počet způsobů, kterými lze konvexní n-úhelník rozdělit pomocí úhlopříček na trojúhelníky.* **[3]**

Příklad 28. *Nechť e_n značí počet permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, které mají pouze cykly sudé délky. Podobně o_n označuje počet permutací, jejichž cykly mají pouze liché délky. Ukažte, že platí $e_{2n} = o_{2n}$.* **[5]**

7 Zadáno 20. 5. 2013

Příklad 29. *Nechť X je konečná množina a $\mathcal{M} \subseteq 2^X$. Řekneme, že množinový systém $\mathcal{M}$ je 2-obarvitelný, pokud lze obarvit prvky X dvěma barvami tak, aby každá množina z $\mathcal{M}$ obsahovala prvky obou barev. Ukažte, že Fanova rovina není 2-obarvitelná.* **[2]**

Příklad 30. *Určete počet perfektních párování v žebříku Z_n:* **[2]**



V následujících příkladech uvažte definice z posledního cvičení.

Příklad 31. *Ukažte polynomiální převod SAT $\propto$ 3-SAT.* **[3]**

Příklad 32. *Ukažte polynomiální převod 3-SAT $\propto$ 3-BG.* **[4]**