

# Teorie grafů a algoritmy pro matematiky 1 – 9. cvičení\*

15. dubna 2013

## 1 Barevnost grafů

Zobrazení  $b: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  nazveme *obarvením grafu*  $G=(V,E)$ , pokud pro každou hranu  $\{x, y\} \in E$  platí  $b(x) \neq b(y)$ . Barevnost grafu  $G$ , označovaná  $\chi(G)$ , je minimální počet barev nutný k obarvení  $G$ . Velikost největší nezávislé množiny grafu  $G$ , neboli množiny, ve které žádné dva vrcholy nejsou spojené hranou, značíme  $\alpha(G)$ .

**Příklad 1.** Uvažujme graf  $Q_n$  (graf  $n$ -dimenzionální krychle), jehož vrcholy tvoří množinu  $\{0, 1\}^n$  a hrany spojují vrcholy lišící se právě v jedné souřadnici. Čemu se rovná  $\chi(Q_n)$ ?

**Příklad 2.** Pro každý graf s  $n$  vrcholy a  $m$  hranami zkuste ukázat následující odhady barevnosti:

(a)  $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$ .

(b)  $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$ .

(c)  $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$ .

**Příklad 3.** Graf  $G$  je kriticky  $k$ -obarvitelný, pokud  $\chi(G) = k$  a každý jeho podgraf  $H \subset G$  je již  $(k - 1)$ -obarvitelný. Nechť  $\delta(H)$  označuje minimální stupeň grafu  $H$ .

(a) Ukažte, že je-li  $H$  kriticky  $k$ -obarvitelný, tak  $\delta(H) \geq k - 1$ .

(b) Ukažte, že pro každý graf  $G$  platí

$$\chi(G) \leq 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H).$$

**Příklad 4.** Máme-li pořadí vrcholů  $v_1, \dots, v_n$  grafu  $G$  a množinu barev  $\{1, 2, \dots, k\}$ , tak hladový algoritmus obarvení bere vrcholy v tomto pořadí a každému přiřadí minimální povolenou barvu.

(a) Ukažte, že vždy existuje takové pořadí vrcholů, na kterém hladový algoritmus barvení použije  $\chi(G)$  barev.

(b) Ukažte, že existuje strom  $T$  a pořadí jeho vrcholů takové, že na něm hladový algoritmus obarvení spotřebuje  $\Omega(\log n)$  barev.

**Příklad 5** (\*). Mějme nekonečný graf  $G$  s množinou vrcholů  $V = \mathbb{R}^2$ , kde dva vrcholy spojíme hranou právě tehdy, když jsou od sebe ve vzdálenosti přesně jedna. Ukažte, že  $4 \leq \chi(G) \leq 7$ .

## 2 Vybíravost grafů

Máme-li ke každému vrcholu  $v$  grafu  $G$  přiřazený povolený seznam barev  $L(v)$ , pak řekneme, že  $G$  je  $L$ -obarvitelný, pokud jej lze obarvit pouze povolenými barvami ze seznamů  $L$ . Graf je  $k$ -vybíratelný, pokud je  $L$ -obarvitelný pro libovolné přiřazení seznamů  $L$  takové, že každý seznam obsahuje alespoň  $k$  barev. Vybíravost grafu  $G$ , což je nejmenší  $k$ , pro který je  $G$   $k$ -vybíratelný, značíme  $\chi_l(G)$ .

**Příklad 6.** Nalezněte grafy (a jejich seznamy povolených barev) s omezenou barevností, ale libovolně velkou vybíravostí.

**Příklad 7.** Nalezněte rovinný graf (a jeho seznamy povolených barev), který není 4-vybíratelný.

---

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>