Teorie grafů a algoritmy pro matematiky 1 – 8. cvičení*

8. dubna 2013

1 Rovinné grafy

Rovinný graf G je graf, který má alespoň jedno rovinné nakreslení, ve kterém mají oblouky odpovídající různým hranám společné nanejvýš koncové body. Po odstranění těchto oblouků se rovina rozpadne na konečný počet souvislých oblastí, které nazýváme *stěny nakreslení grafu G*.

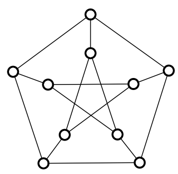
Věta (Eulerova formule)**.** *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf. Označme $v = |V|$, $e = |E|$ a jako f počet stěn jeho nakreslení. Potom platí $v + f - e = 2$.*

Použití Eulerovy formule: pro každý rovinný graf G s $v \geq 3$ platí $e \leq 3v - 6$. Nemá-li G trojúhelník, tak dokonce platí $e \leq 2v - 4$.

Věta (Kuratowského věta)**.** *Graf $G = (V, E)$ je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podrozdělení K_5 ani $K_{3,3}$.*

Příklad 1. *Nalezněte rovinná nakreslení grafů K_5, K_6 a K_7 na toru.*

Příklad 2. *Ukažte, že Petersenův graf není rovinný.*



Příklad 3. *Jako obvod grafu značíme délku jeho nejkratšího cyklu (nemá-li graf cyklus, definujeme jeho obvod jako nekonečno). Ukažte, že pro počet hran m rovinného grafu o obvodu $g \in \mathbb{N}$ platí $m \leq \frac{g}{(g-2)}(n-2)$, kde n značí počet vrcholů.*

Příklad 4. *Ukažte, že doplněk rovinného grafu na alespoň jedenácti vrcholech není rovinný.*

Příklad 5. *Nechť máme rovinné nakreslení grafu G, ve kterém jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme, že vrcholy G jsou obarveny třemi barvami. Ukažte, že počet stěn, na jejichž vrcholech jsou použity všechny tři barvy, je sudý.*

Příklad 6. *Vnějškově rovinný graf je graf, který má takové rovinné nakreslení, v němž jsou všechny vrcholy na vnější stěně. Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf je 3-obarvitelný.*

Příklad 7 (*)**.** *Dokažte, že hrany 4-regulárního rovinného grafu nelze obarvit dvěma barvami tak, aby každý vrchol sousedil se dvěma červenými a dvěma modrými barvami tak, že jednobarevné páry hran se navzájem separují.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/