Teorie grafů a algoritmy pro matematiky 1 – 6. cvičení*

3. dubna 2013

1 Grafová souvislost podruhé

Orientovaný graf G je *silně souvislý*, pokud pro každé jeho dva vrcholy u a v existují orientované cesty z u do v a z v do u. Jako *most* označujeme hranu, po jejímž odstranění vzroste počet komponent souvislosti. Pro $k \in \mathbb{N}$ nazveme graf G *kriticky k-souvislý*, pokud po odebrání libovolné hrany není vzniklý graf k-souvislý. *Chorda cyklu C* je hrana neobsažená v C, jejíž koncové vrcholy jsou vrcholy cyklu C.

Věta (Ušaté lemma)**.** *Graf je 2-souvislý právě tehdy, když jej umíme dostat z cyklu postupným přidáváním cest, které mají s původním grafem společné jen koncové vrcholy (lepením uší k cyklu).*

Příklad 1. *Řekneme, že dvě hrany e a f hranově 2-souvislého grafu G jsou ekvivalentní, pokud se rovnají, nebo po jejich odstranění není vzniklý graf souvislý. Ukažte, že*

(a) se skutečně jedná o relaci ekvivalence.

(b) všechny hrany ve stejné třídě ekvivalence leží na cyklu (který může obsahovat i další hrany).

(c) po odstranění hran ležících v téže třídě ekvivalence P dostaneme graf, jehož komponenty jsou hranově 2-souvislé.

(d) kontrahováním komponent $G - P$ dostaneme cyklus.

Příklad 2 (Robbinsova věta)**.** *Dokažte, že hrany grafu G lze zorientovat tak, že výsledný $\overrightarrow{G}$ je silně souvislý právě tehdy, když G je hranově 2-souvislý.*

Příklad 3. *Souvislost v orientovaných grafech.*

(a) Ukažte, že orientovaný graf je silně souvislý právě tehdy, když existuje alespoň jedna hrana opouštějící každou neprázdnou podmnožinu vrcholů $X \subset V$.

(b) Ukažte, že každý turnaj (orientace úplného grafu) je silně souvislý právě tehdy, když obsahuje orientovaný Hamiltonovský cyklus.

Příklad 4. *Ukažte, že 2-souvislý graf graf je kriticky 2-souvislý právě tehdy, když žádný jeho cyklus neobsahuje chordu.*

Příklad 5 (*)**.** *Pro $k \geq 2$ ukažte, že v k-souvislém grafu leží každých k vrcholů na společném cyklu.*

Příklad 6. *Pro grafy $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ označme jako $G_1 \times G_2$ graf s množinou vrcholů $V_1 \times V_2$, kde vrcholy (u, u') a (v, v') jsou spojené hranou, pokud $\{u, v\} \in E_1$ a $\{u', v'\} \in E_2$. Ukažte, že pro cykly C_1 a C_2 je graf $C_1 \times C_2$ je souvislý právě tehdy, když nejsou oba sudé.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/