Teorie grafů a algoritmy pro matematiky 1 – 5. cvičení*

16. března 2013

1 Grafová souvislost

Hranový řez grafu $G = (V, E)$ je množina hran $F \subseteq E$ taková, že graf $G' = (V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Vrcholový řez grafu* $G = (V, E)$ je množina vrcholů $A \subseteq V$ taková, že graf $G'' = (V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2})$ je nesouvislý. *Hranová souvislost grafu* $G = (V, E)$ je velikost nejmenšího hranového řezu v G. Značíme ji $k_e(G)$. *Vrcholová souvislost grafu* $G = (V, E)$ definujeme jako $n - 1$, je-li G úplný graf, a jako velikost nejmenšího vrcholového řezu jinak. Značíme ji $k_v(G)$.

Příklad 1. *Dokažte, že platí následující tvrzení.*

(a) Pro každý graf G a libovolnou jeho hranu e platí $k_e(G) - 1 \leq k_e(G - e) \leq k_e(G)$.

(b) Pro každý graf G a libovolnou jeho hranu e platí $k_v(G) - 1 \leq k_v(G - e) \leq k_v(G)$.

(c) Pro každý graf G platí $k_v(G) \leq k_e(G)$.

Příklad 2. *Najděte příklad grafu G, ve kterém lze odebrat vrchol tak, že vrcholová souvislost G vzroste.*

Příklad 3. *Ukažte, že pro každé $k \geq 2$ je každý k-regulární souvislý bipartitiní graf vrcholově 2-souvislý.*

Příklad 4. *Pro $k \in \mathbb{N}$ označme jako $\mathbb{B}^k$ množinu binárních řetízků délky k. Uvažme graf $Q_k = (V, E)$, nazývaný k-krychle, ve kterém $V = \mathbb{B}^k$ a $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když se řetízky u a v liší na právě jedné pozici. Ukažte, že $k_v(Q_k) = k$.*

Příklad 5. *Buď G* kritický 2-souvislý graf, *to znamená, že je 2-souvislý, ale žádný z grafů $G - e$ pro $\in E(G)$ není 2-souvislý.*

(a) Dokažte, že alespoň jeden vrchol G má stupeň 2.

(b) Pro každé n uveďte příklad kritického 2-souvislého grafu s vrcholem stupně alespoň n.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/