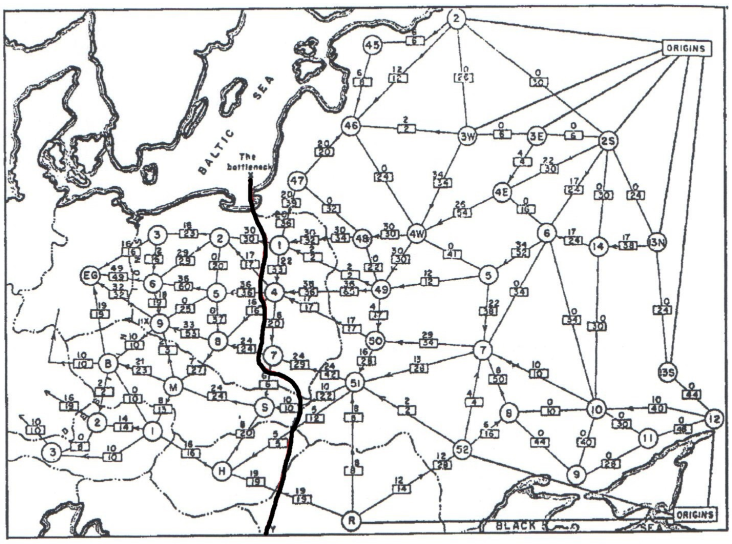
Teorie grafů a algoritmy pro matematiky 1 – 3. cvičení*

3. března 2013

1 Toky v sítích



Železniční síť střední a východní Evropy sestavená v 50. letech armádou USA podle zpráv C.I.A. Každá hrana má vyznačený směr, kterým jezdí vlaky, a nosnost. Minimální řez sítí (s hodnotou 163 000 tun) je vyznačený. Ford s Fulkersonem tuto zprávu uvádějí jako motivaci svého výzkumu.

Síť G je uspořádaná čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, z a s jsou dva různé vrcholy grafu G (říkáme jim *zdroj* a *stok*) a *kapacita* $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany. *Tok v síti* je každá funkce $f\colon E \to \mathbb{R}$ splňující $0 \le f(e) \le c(e)$ pro každou hranu $e \in E$ a $\sum_{(x,u)\in E} f(x,u) = \sum_{(u,y)\in E} f(u,y)$ pro každý vrchol $u \in V$ mimo stok a zdroj. *Velikost toku* je $|f| = \sum_{(z,x)\in E} f(z,x) - \sum_{(x,z)\in E} f(x,z)$. *Rezerva hrany* $e = (u,v)$ při toku f se definuje jako $r(e) = c(e) - f(e)$. Opačnou hranu (v,u) k hraně e budeme značit e'. *Zlepšující cesta* je orientovaná cesta, jejíž všechny hrany mají nenulovou rezervu.

Algoritmus 1.1: FordFulkerson(G)

$f \leftarrow$ *nulový tok*
while existuje zlepšující cesta P ze z do s
do {
Buď P nějaká taková cesta.
$\epsilon \leftarrow \min_{e\in P} r(e)$
Zvětšíme tok f podél P o ϵ (každé hraně $e \in P$ zvětšíme $f(e)$, případně zmenšíme $f(e')$, podle toho, co jde).
}

Příklad 1. *(a) Najděte síť (a posloupnost použitých zlepšujících cest), na které F.-F. algoritmus nedospěje ke správnému výsledku, pokud mu povolíme používat jen dopředné hrany.*

(b) Najděte posloupnost sítí (a posloupnosti použitých zlepšujících cest), na které má F.-F. algoritmus exponenciální časovou složitost (vzhledem k počtu bitů potřebných k uložení grafu a kapacit).

Příklad 2. *Při hledání maximálního toku jsou kapacitami omezené hrany. Někdy se ale může stát, že budeme potřebovat nějaké kapacity přiřadit i vrcholům („vrcholem nesmí protéct víc než x litrů tekutiny za jednotku času“). Jak najít maximální tok splňující i tuto podmínku?*

---

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/˜balko/