Teorie grafů a algoritmy pro matematiky 1 – 2. cvičení*

25. února 2013

1 Grafy a jejich vlastnosti

Rovinný graf G je graf, který má alespoň jedno rovinné nakreslení, ve kterém mají oblouky odpovídající různým hranám společné nanejvýš koncové body. Po odstranění těchto oblouků se rovina rozpadne na konečný počet souvislých oblastí, které nazýváme *stěny nakreslení grafu G*.

Řekneme, že graf je d-regulární, pokud má každý jeho vrchol stupeň přesně d. Zobrazení $b\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ nazveme *obarvením grafu G=(V,E)*, pokud pro každou hranu $\{x, y\} \in E$ platí $b(x) \neq b(y)$. *Barevnost grafu G*, označovaná $\chi(G)$, je minimální počet barev nutný k obarvení G. *Klikovost grafu G*, značená $\omega(G)$, udává největší k takové, že $K_k \subseteq G$. Velikost největší *nezávislé množiny* grafu G, neboli množiny, ve které žádné dva vrcholy nejsou spojené hranou, značíme $\alpha(G)$.

Příklad 1. *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf. Označme $v = |V|$, $e = |E|$ a jako f počet stěn jeho nakreslení.*

(a) Dokažte Eulerovu formuli, neboli $v + f - e = 2$.

(b) Ukažte, že pro každý rovinný graf s $v \geq 3$ platí $e \leq 3v - 6$.

(c) Zkuste dokázat vzoreček $e \leq 2v - 4$ pro rovinné grafy bez K_3 a s $v \geq 3$. Jsou odhady nejlepší možné?

(d) Pro jaké největší $d \in \mathbb{N}$ dokážete najít d-regulární rovinný graf?

Příklad 2. *Buď G rovinný graf neobsahující K_3. Dokažte $\chi(G) \leq 4$.*

Příklad 3. *Zkuste odvodit co nejvíce vztahů mezi parametry $\alpha(G)$, $\omega(G)$ a $\chi(G)$, případně jejich závislosti na dalších grafových parametrech. Jakých hodnot mohou tyto parametry nabývat u rovinných grafů?*

Příklad 4. *Nechť G je rovinný graf na alespoň třech vrcholech. Ukažte, že potom $V(G)$ může být rozděleno na tři množiny S_1, S_2 a S_3 tak, že každé S_i indukuje les.*

Příklad 5. *Graf, který má barevnost k, nazveme k-kritický, pokud pro každý jeho vrchol v a hranu e platí $\chi(G - v) < k$, $\chi(G - e) < k$.*

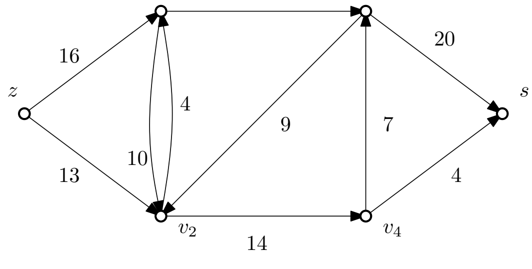
(a) Ukažte, že graf je 2-obarvitelný (bipartitní) právě tehdy, když neobsahuje cyklus liché délky.

(b) Charakterizujte 3-kritické grafy.

Příklad 6. *Mějme rovinné nakreslení grafu, jehož každý vrchol má sudý stupeň. Ukažte, že lze obarvit stěny tohoto nakreslení dvěma barvami tak, že dvě stěny stejné barvy nemají společnou hranu na hranici.*

2 Toky – Ford-Fulkersonův algoritmus

Příklad 7. *Najděte Ford-Fulkersonovým algoritmem maximální tok v následující síti.*



*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/