Teorie grafů a algoritmy pro matematiky 1 – 1. cvičení*

18. února 2013

(Neorientovaný) graf G je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je neprázdná množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran. Důležitými grafy jsou například *úplný graf* na n vrcholech $K_n = (V, \binom{V}{2})$, $|V| = n$, cyklus $C_n = (\{1, \ldots, n\}, \{\{i, i+1\} \mid i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\})$, cesta $P_n = (\{1, \ldots, n\}, \{\{i, i+1\} \mid i = 1, \ldots, n-1\})$ či *úplný bipartitní graf* $K_{m,n}$, kde $m, n \geq 1$, $V = \{u_1, \ldots, u_n\} \cup \{v_1, \ldots, v_m\}$ a $E = \{\{u_i, v_j\} \mid i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$.

Graf H je *podgrafem* grafu G, pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. *Stupeň vrcholu* v je počet hran grafu G obsahujících vrchol v, značíme jej $deg_G(v)$. Graf G je *souvislý*, pokud v něm pro každé jeho dva vrcholy u, v existuje cesta z u do v. *Kostra grafu* $G = (V, E)$ je maximální souvislý graf bez kružnice (tj. *strom*) tvaru (V, E'), kde $E' \subseteq E$. *Hamiltonovská kružnice* (respektive cesta) v grafu G je kružnice (cesta) obsahující všechny vrcholy G. V *orientovaném grafu* bereme jako hrany uspořádané dvojice vrcholů.

1 Opakování z teorie grafů

Příklad 1. *Je následující důkaz tvrzení „Každý graf s alespoň třemi vrcholy a se všemi stupni velikosti alespoň dva obsahuje cyklus C_3." správný?*

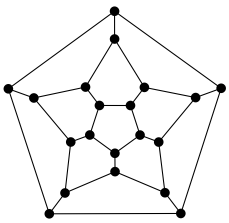
Důkaz. Postupujeme indukcí podle počtu vrcholů n. Tvrzení platí v případě $n = 3$, protože daný graf může být jen C_3. Uvažme indukční krok, nechť G je graf na $n-1$ vrcholech, pro který tvrzení platí. Vytvoříme z něj nový graf G' na n vrcholech přidáním nového vrcholu, který je incidentní s alespoň dvěma vrcholy z G. Protože G obsahoval cyklus C_3, tak jej G' obsahuje také. □

Příklad 2. *Ukažte, že každý souvislý graf G s alespoň dvěma vrcholy obsahuje dva různé vrcholy u, v, takové, že $G - u$ i $G - v$ jsou souvislé.*

Příklad 3. *Spočtěte počet koster úplného bipartitního grafu $K_{2,n}$.*

Příklad 4. *Hledání Hamiltonovských kružnic a cest.*

(a) Nalezněte Hamiltonovskou kružnici pro pravidelný dvanáctistěn.



(b) Ukažte, že každý orientovaný úplný graf obsahuje orientovanou Hamiltonovskou cestu.

(c) Pro která n lze úplný graf K_n rozložit na hranově disjunktní Hamiltonovské kružnice? Co na Hamiltonovské cesty?

Příklad 5. *Nechť $\alpha(G)$ značí velikost největší podmnožiny vrcholů grafu G, ve které nejsou žádné dva vrcholy spojené hranou. Ukažte, že pro graf G s n vrcholy a maximálním stupněm d platí*

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{d+1}.$$

Příklad 6 (*). *Označme jako délku cesty počet jejích hran.*

(a) Ukažte, že každý souvislý graf s n vrcholy a minimálním stupněm δ obsahuje cestu délky δ.

(b) Ukažte, že každý takový graf obsahuje cestu délky $\min\{2\delta, n-1\}$.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/