Teorie grafů a algoritmy pro matematiky 1 – 13. cvičení[*]

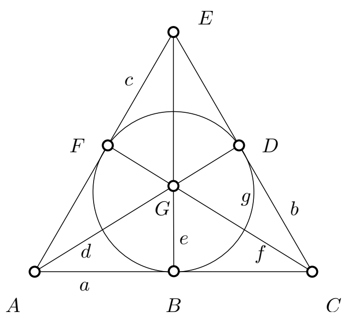
13. května 2013

1 Konečné projektivní roviny

Nechť X je konečná množina a $\mathcal{L} \subseteq 2^X$. Potom dvojici $(X, \mathcal{L})$ nazveme *konečnou projektivní rovinou*, pokud splňuje následující axiomy:

1. $\exists F \subseteq X, |F| = 4 \forall : |L \cap F| \leq 2$ (existují čtyři body, z nichž žádné tři nejsou kolineární).
2. $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}, L_1 \neq L_2 : |L_1 \cap L_2| = 1$ (každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě).
3. $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \exists! L \in \mathcal{L} : x_1, x_2 \in L$ (každými dvěma body prochází právě jedna přímka).

Řád projektivní roviny $(X, \mathcal{L})$ se rovná počtu bodů na přímce minus jedna (víme, že všechny přímky obsahují stejný počet bodů). Víme také, že konečná projektivní rovina řádu n obsahuje $n^2 + n + 1$ přímek a bodů a také každý bod leží na $n + 1$ přímkách. Příkladem konečné projektivní roviny (řádu 2) je *Fanova rovina*:



Latinský čtverec řádu n je matice o rozměrech $n \times n$ nad prvky z $\{1, 2, \ldots, n\}$, kde se každé číslo v každém sloupci a řádku vyskytuje právě jednou. Dva latinské čtverce L a L' jsou *ortogonální*, pokud pro každou uspořádanou dvojici čísel z $\{1, 2, \ldots, n\}$ existuje $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $(L)_{ij} \neq (L)_{ij}$.

Příklad 1. *Pro každý axiom konečných projektivních rovin uvažte, jaké nové konfigurace mohou vzniknout, pokud jej vynecháme.*

Příklad 2. *Nechť $(X, \mathcal{L})$ je konečná projektivní rovina. Definujme duál této roviny jako množinový systém nad množinou $\mathcal{L}$, jehož množiny jsou tvaru $\{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\}$ pro každé $x \in X$. Ukažte, že duál konečné projektivní roviny je opět konečná projektivní rovina.*

Příklad 3. *Pokuste se nakreslit konečnou projektivní rovinu řádu 3.*

Příklad 4. *Ukažte, že až na isomorfismus je Fanova rovina jediná konečná projektivní rovina řádu dva.*

Příklad 5. *Nechť X je konečná množina a $\mathcal{M} \subseteq 2^X$. Řekneme, že množinový systém $\mathcal{M}$ je 2-obarvitelný, pokud lze obarvit prvky X dvěma barvami tak, aby každá množina z $\mathcal{M}$ obsahovala prvky obou barev. Ukažte, že Fanova rovina není 2-obarvitelná.*

Příklad 6. *Nalezněte maximální množinu navzájem ortogonálních latinských čtverců řádu čtyři a dokažte, že je maximální.*

[*]Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/