Teorie grafů a algoritmy pro matematiky 1 – 11. cvičení*

29. dubna 2013

1 Vytvořující funkce - úvod

Mocninná řada je řada tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ a x je reálná proměnná. Jako *(obyčejnou) vytvořující funkci* posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ označíme mocninnou řadu $a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \ldots)$.

Věta (Zobecněná binomická věta)**.** *Pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ je $(1+x)^r$ vytvořující funkcí posloupnosti $\left(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \ldots\right)$, kde $\binom{r}{0} = 1$ a pro $k \in \mathbb{N}$ platí*

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

Příklad 1. *Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ zobecněná binomická věta implikuje vztah*

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1}x + \cdots + \binom{n+k-1}{n-1}x^k + \cdots.$$

Příklad 2. *Určete koeficient*

(a) u x^{50} v $(x^7 + x^8 + x^9 + \cdots)^6$,

(b) u x^{10} v $\frac{2+x}{(1+3x)(1-2x)^2}$,

(c) u x^{2013} v $\sin(x)$.

Příklad 3. *Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru):*

(a) $(0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, \ldots)$,

(b) $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \ldots)$,

(c) $(1^2, 2^2, 3^2, \ldots)$,

(d) $(0, 2, 6, 12, 20, \ldots)$, tedy n-tý člen je součtem prvních n sudých přirozených čísel včetně nuly.

Příklad 4. *Nalezněte posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, která splňuje $a_{n+1} = 2a_n + n$, $a_0 = 1$.*

Příklad 5. *Dokážete nalézt dvě nestandardní šestistěnné hrací kostky B a C takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pravděpodobnost, že na B a C padne dohromady přesně n, stejná jako pravděpodobnost, že n padne na dvou standardních šestistěnných hracích kostkách?*

Příklad 6. *Rozklad čísla $n \in \mathbb{N}$ je zápis n jako součtu přirozených čísel (nezáleží nám na pořadí sčítanců).*

(a) Nechť a_n značí počet rozkladů čísla n. Jaká je generující funkce pro posloupnost $(a_1, a_2, \ldots)$?

(b) Ukažte, že počet rozkladů n na liché části se rovná počtu rozkladů n na vzájemně různé části.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/