Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 7. cvičení*

1 Dualita

Mějme následující úlohu lineárního programování P s n proměnnými a m podmínkami:

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{P}$$

Té budeme říkat *primární lineární program* (neboli *primár*). Jeho *duálním lineárním programem* (neboli *duálem*) nazveme následující lineární program D s m proměnnými a n podmínkami:

$$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \text{ za podmínek } A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \text{ a } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{D}$$

Vysvětlení: při řešení D se snažíme najít lineární kombinaci m podmínek soustavy $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ s nějakými koeficienty $y_1, \ldots, y_m \geq 0$ takovými, aby výsledná nerovnost měla j-tý koeficient aspoň c_j pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ a pravá strana přitom byla co nejmenší.

Ukazuje se, že program D „hlídá“ program P podle následujícího výsledku, ze kterého například vidíme, že je-li P neomezený, pak D nemá přípustné řešení.

Věta 1 (Slabá věta o dualitě)**.** *Pro každé přípustné řešení $\mathbf{x}$ úlohy P a každé přípustné řešení $\mathbf{y}$ úlohy D platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$.*

Následující zesílení je asi nejdůležitějším teoretickým výsledkem o lineárních programech.

Věta 2 (Silná věta o dualitě)**.** *Pro úlohy P a D nastane právě jedna z následujících čtyř možností:*

(a) Ani P ani D nemá přípustné řešení.

(b) Úloha P je neomezená a D nemá přípustné řešení.

(c) Úloha P nemá přípustné řešení a D je neomezená.

(d) Úlohy P i D mají přípustné řešení. Pak mají i optimální řešení $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ a platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}^*$.

Duální lineární programy můžeme uvážit i pro lineární programy v obecném tvaru, stačí postupovat podle následující tabulky. Postup funguje zleva doprava i zprava doleva.

	Primární úloha	Duální úloha
Proměnné	$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$	$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$
Matice	$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$	$A^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$
Pravá strana	$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$	$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$
Účelová funkce	$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
Podmínky	i-tá podmínka má $\leq$	$y_i \geq 0$
	$\geq$	$y_i \leq 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	j-tá podmínka má $\geq$
	$x_j \leq 0$	$\leq$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Příklad 1. *Vytvořte duální program D pro následující primární lineární program P:*

$$\begin{aligned} \max 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad 2. *Vytvořte duální program D pro následující primární lineární program P:*

$$\begin{aligned} \max x_1 - 2x_2 + 3x_4 & \\ x_2 - 6x_3 + x_4 &\leq 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &\geq 5 \\ x_2 &\leq 0 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad 3. *Dokažte nebo vyvraťte tvrzení:*

(a) Pro každý lineární program P platí, že duál duálu P je původní program P.

(b) Pokud má lineární program optimum s celočíselnými proměnnými, tak má celočíselné optimální řešení i duál.

Příklad 4. *(*) Mějme následující úlohu lineárního programování P:*

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Pomocí duality zkonstruujte soustavu nerovnic, pro kterou ze souřadnic libovolného řešení lze vyčíst optimální řešení pro P.

Tím ukážeme, že asymptotická složitost problému rozhodnout, zda je daný mnohostěn neprázdný, je stejná jako složitost problému nalezení optimálního řešení úlohy lineárního programování. Nebo ještě jinak: nalezení přípustného řešení lineárního programu je asymptoticky stejně obtížné jako nalezení optimálního řešení.

Příklad 5. *Zformulujte relaxovanou úlohu lineárního programování pro* Set cover problem*: vyberte z množin $S_1, \ldots, S_m \subseteq \{1, \ldots, n\}$ co nejméně množin tak, aby jejich sjednocení pokrývalo celou nosnou množinu $\{1, \ldots, n\}$. Napište duál vaší úlohy a nahlédněte, jaký problém řeší jako relaxace.*