Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 6. cvičení[*]

1 Simplexová metoda o něco podrobněji

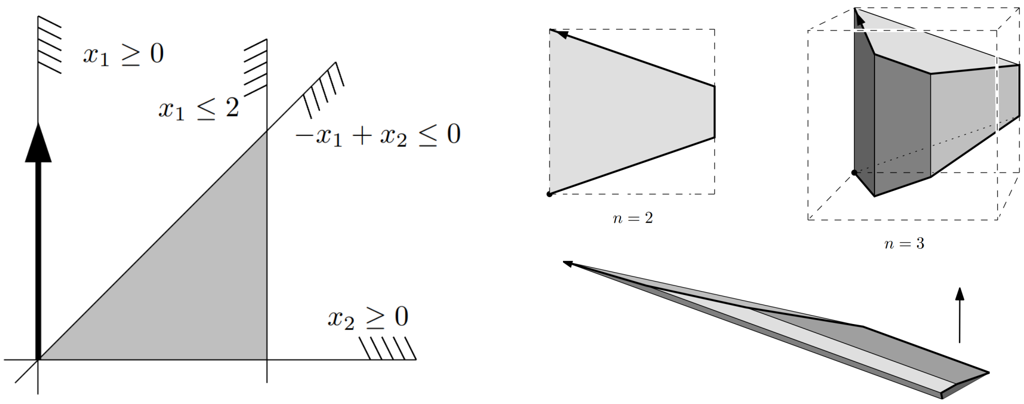
Víme, že simplexová metoda se může zacyklit a pak nikdy neskončí. To nastává pouze v degenerovaném případě a je to jediný způsob, jak metoda může selhat. V praxi toto typicky nenastává a možnost zacyklení se často ignoruje. Jinak se zacyklení dá zabránit volbou vhodného pivotovacího pravidla, poslouží například Blandovo pravidlo.

Příklady pivotovacích pravidel pro výběr vstupující proměnné x_t a vystupující x_s:

1. *Dantzigovo pravidlo:* Vyber $t \in N$ s maximálním r_t a zvol x_s libovolně z možných proměnných.
2. *Blandovo pravidlo:* Vyber nejmenší možné $t \in N$ a pro něj nejmenší možné $s \in B$. Brání zacyklení, ale je pomalé.

Existuje spousta dalších pivotovacích pravidel (lexikografické, náhodné a další).

Efektivita simplexové metody: V praxi funguje velmi efektivně, podle počítačových experimentů u úloh v rovnicovém tvaru s m omezeními typicky stačí k nalezení optima $2m$ až $3m$ pivotovacích kroků. Není známé pivotovací pravidlo, pro které by se umělo ukázat, že simplexová metoda skončí v počtu kroků, který je polynomiální vzhledem k počtu omezení m a počtu proměnných n. Naopak pro spoustu pivotovacích pravidel existují příklady v rovnicovém tvaru s $O(n)$ omezeními a $O(n)$ proměnnými, pro které s určitou počáteční bází potřebuje simplexová metoda $2^{\Omega(n)}$ pivotovacích kroků. Tyto příklady jsou ovšem vzácné. Existuje pravděpodobnostní pivotovací pravidlo, pro nějž je známo, že simplexová metoda nad každou vstupní úlohou použije nanejvýš $e^{O(\sqrt{n \ln n})}$ pivotovacích kroků.



Obrázek 1: Degenerovaný program a Mintyho–Kleeovy hyperkrychle (J. Matoušek: Understanding and using linear programming).

Příklad 1. *Vyřešte simplexovou metodou následující úlohu lineárního programování:*

$$\begin{aligned} \max x_2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 0 \\ x_1 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Jako pivotovací pravidlo použijte Dantzigovo pravidlo.

[*]Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Příklad 2. *Na následující úlohy lineárního programování aplikujte simplexovou metodu. V nějaké chvíli by již nemělo být možné pokračovat. Zkuste zdůvodnit, proč se algoritmus zastavil.*

(a) Optimalizujte funkci $\max 3x_1 + x_2$ *za podmínek*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq -1 \\ -x_1 - x_2 &\leq -3 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Po převodu do rovnicového tvaru můžete použít počáteční přípustné bázické řešení s $x_1 = 3$ *a* $x_2 = 4$.

(b) Optimalizujte funkci $\max 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$ *za podmínek*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 20 \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 &\leq 50 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 30 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Příklad 3. *Vyřešte simplexovou metodou následující úlohu lineárního programování:*

$$\begin{aligned} &\max 5x_1 - 19x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\ &x_5 = -0.5x_1 + 2x_2 + 0.5x_3 - 4x_4 \\ &x_6 = -0.5x_1 + 4x_2 + 1x_3 - x_4 \\ &x_7 = 1 - x_1 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0. \end{aligned}$$

Jako pivotovací pravidlo použijte Blandovo pravidlo. Změní se výpočet, pokud bychom používali Dantzigovo pravidlo?