

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 3. cvičení*

1 Základní definice z geometrie

Afinní prostor $A \subseteq \mathbb{R}^d$ má tvar $L + \mathbf{v}$ pro nějaký lineární prostor L a vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$. Afinní prostor jde určit pomocí soustavy rovnic $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dimenze afinního prostoru A je rovna dimenzi jeho přidruženého lineárního prostoru L .

Nadrovina je libovolný afinní prostor v $\mathbb{R}^d$ dimenze $d - 1$. V rovině nadroviny odpovídají přímkám a v $\mathbb{R}^3$ zase rovinám. Nadrovinu lze zapsat jako $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = h\}$ pro $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ a $h \in \mathbb{R}$. Nadrovina rozděluje prostor $\mathbb{R}^d$ na dva poloprostory $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq h\}$ a $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \geq h\}$. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

Množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ je *konvexní*, pokud pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ a $t \in [0, 1]$ platí $t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{y} \in K$. Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v K je celá v K . Vektor $\mathbf{x}$ je *konvexní kombinací* vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, pokud $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ splňují $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

2 Mnohostěny

Konvexní mnohostěn je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně je konvexním mnohostěnem libovolná množina bodů tvaru $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ pro nějakou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Nechť P je konvexní mnohostěn a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$. Jestliže pro každé $\mathbf{x} \in P$ platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq t$ a zároveň existuje $\mathbf{x} \in P : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t$, pak množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t\}$ tvoří *tečnou nadrovinu* H mnohostěnu P . Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem P pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P . K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* $\emptyset$ a P . Stěny dimenzí 0, 1 a $d - 1$ nazýváme *vrcholy*, *hrany* a *fasety*.

Příklad 1. Dokažte, že množina všech optimálních řešení lineárního programu $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, kde $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, je konvexní množina.

Příklad 2. Mějme mnohostěn $P = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \text{ \& } x \leq 2\}$. Převeďte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).

Příklad 3. Mějme mnohostěn $P \subseteq \mathbb{R}^3$ určený množinou vrcholů

$$\mathbf{a} = (2, 1, 6), \quad \mathbf{b} = (0, -5, 0), \quad \mathbf{c} = (-2, 2, -1), \quad \mathbf{d} = (0, -4, 0), \quad \mathbf{e} = (0, 1, 1).$$

Pro každou z následujících rovin určete, zda je vůči P tečná, sečná či mimoběžná. Pro tečné roviny určete dimenzi příslušné stěny.

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x + 3y - 2z = 1\},$

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 2\},$

(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + z = 0\}.$

Příklad 4. Dovedete určit dimenzi následujícího mnohostěnu?

$$P = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z \leq 4, x + y \geq 3, 1 \leq y + w \leq 2, z \geq 1, w \leq 6\}$$

Příklad 5. Naleznete všechny vrcholy mnohostěnu zadaného následujícími nerovnostmi a zdůvodněte, že jiné vrcholy neexistují:

$$\begin{aligned} x + y + z &\leq 3, \\ y + 2z &\leq 2, \\ x, y, z &\geq 0. \end{aligned}$$

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

Příklad 6. Počty stěn pro známé mnohostěny v $\mathbb{R}^d$, kde $d \in \mathbb{N}$.

(a) Jaký je počet stěn krychle a osmistěnu v $\mathbb{R}^3$?

(b) Jaký je počet vrcholů a faset d -dimenzionální krychle $[0, 1]^d$?

(c) Jaký je počet vrcholů a faset d -dimenzionálního křížového mnohostěnu (neboli zobecněného osmistěnu)

$$\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_d| \leq 1\}?$$

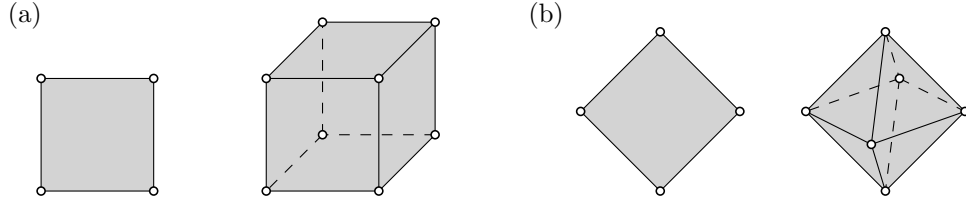


Figure 1: Příklady (a) d -dimenzionální krychle a (b) d -dimenzionálního křížového mnohostěnu pro $d = 2, 3$.

Příklad 7. Nechť P je konvexní mnohostěn v $\mathbb{R}^d$ a nechť F a G jsou jeho stěny. Dokažte, že $F \cap G$ je stěnou P .

Přesněji $F = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \alpha\}$ a $G = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{b}^\top \mathbf{x} = \beta\}$, kde platí $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq \alpha$ a $\mathbf{b}^\top \mathbf{x} \leq \beta$ pro každé $\mathbf{x} \in P$. Uvedte formuli, která stěnu $F \cap G$ určuje.