

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 2. cvičení*

1 Celočíselné lineární programy

Z minula víme, že spousta problémů se dá naformulovat jako úloha lineárního programování a poté lze efektivně řešit. Dnes si ukážeme, že vyžadujeme-li celočíselná řešení (což je mnohdy přirozený požadavek), pak obecně přijdeme o efektivní řešení, protože lze podobně naformulovat spoustu NP-těžkých problémů. Existují ovšem problémy, pro které je vždy nějaké optimální řešení celočíselné.

Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a vektory $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Potom úlohou *celočíslného (lineárního) programování* je následující optimalizační úloha

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ pro } \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n.$$

U úlohy *binárního (lineárního) programování* vyžadujeme podmínku $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$ a u úlohy *smíšeného (lineárního) programování* jsou některé proměnné reálné a některé celočíselné.

Příklad 1. Pro zadanou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a vektory $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ uvažujme příslušný celočíselný program a lineární program:

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ pro } \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n, \quad (\text{CP})$$

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{LP})$$

Předpokládejme, že oba programy jsou řešitelné a mají optimální řešení $\mathbf{x}_{CP}^*$ a $\mathbf{x}_{LP}^*$. Dokažte, že platí nerovnost $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}_{CP}^* \leq \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_{LP}^*$.

Příklad 2. Zformulujte Problém batohu pomocí celočíselného lineárního programování. Tedy pro n předmětů, kde i -tý má nějakou váhu v_i a cenu c_i , máme batoh s danou nosností V a my se do něj snažíme naskládat předměty tak, abychom maximalizovali celkovou cenu předmětů v batohu.

Příklad 3. Zformulujte SAT pomocí celočíselného lineárního programování. Tedy pro n proměnných x_i a m klauzulí C_j , které jsou disjunkcemi literálů, chceme pro dano formuli φ , která je konjunkcí klauzulí, rozhodnout, zda je splnitelná.

Příklad 4. Student Maxim Dokonalý dostal na cvičení zadaný úkol: “Navrhněte celočíselný program pro Problém obchodního cestujícího”, čili pro daný ohodnocený neorientovaný graf $G = (V, E, f)$, kde $f: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, chceme najít Hamiltonovskou kružnici v G s nejmenším ohodnocením.

Maxim navrhuje toto řešení: “Pro každou hranu $e \in E$ zavedeme proměnnou $x_e \in \{0, 1\}$, účelovou funkcí bude $\min \sum_{e \in E} f(e)x_e$ a zavedeme podmínky $\sum_{e \in E: u \in e} x_e = 2$ pro každý vrchol $u \in V$.”

Funguje řešení Maxima? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte, proč nefunguje, a ještě vymyslete lepší.

Příklad 5. Pro Problém 3-obarvitelnosti grafu, neboli pro problém rozhodnout, zda lze vrcholy zadaného grafu G korektně obarvit třemi barvami, vymyslete vhodný celočíselný lineární program. Program by měl pouze otestovat, zda je G 3-obarvitelný.

(*) Jak by mohla vypadat celočíselná úloha LP, která spočítá barevnost grafu G , neboli nalezne minimální k takové, že vrcholy G lze korektně obarvit k barvami?

Příklad 6. Ukažte, jak lze:

1. Převést maximalizační úlohu LP na minimalizační a naopak.
2. Převést úlohu LP, která má všechny proměnné $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, na úlohu LP s proměnnými $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ a naopak.
3. Převést úlohu LP s podmínkami ve tvaru nerovností na úlohu LP, jejíž podmínky jsou pouze rovnosti a naopak.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>