# Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 10. cvičení*

## 1 Totální unimodularita

Čtvercová matice $A$ je *unimodulární*, pokud je celočíselná a platí $\det A \in \{-1, 1\}$. Matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je *totálně unimodulární*, pokud každá její čtvercová podmatice má determinant rovný $-1$, 0 nebo 1.

Totálně unimodulární matice jsou pro nás zajímavé, protože mnohostěn $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ má celočíselné vrcholy pro každé $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$, pokud je $A$ totálně unimodulární. Na takových mnohostěnech dokážeme pro každé $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ najít v polynomiálním čase celočíselné optimum. Neboli příslušné celočíslené lineární programy dokážeme řešit efektivně.

Několik faktů o unimodulárních a totálně unimodulárních maticích:

(a) Součin a inverze unimodulárních matic jsou unimodulární matice.

(b) Unimodulární matice jsou právě ty celočíslené matice, jejichž inverze je celočíselná.

(c) Unimodulární matice může obsahovat i jiná čísla než 0 a $\pm 1$ (viz matice $A$ dole).

(d) Součin totálně unimodulárních matic nemusí být totálně unimodulární (viz druhá mocnina matice $B$ dole).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) Existuje polynomiální algoritmus na rozpoznávání totální unimodularity.

**Příklad 1.** *Dokažte, že pokud má matice $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ inverzní matici, která je rovněž celočíselná, pak je $A$ unimodulární.*

**Příklad 2.** *Mějme matici $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$, ve které každý sloupec obsahuje nanejvýš dva nenulové prvky. Nechť lze řádky matice $A$ rozdělit do dvou množin $R_1$ a $R_2$ takových, že jsou-li ve sloupci dva nenulové prvky stejného znaménka, pak oba patří do různých množin $R_i$ a $R_j$ a pokud sloupec obsahuje dva nenulové prvky různých znamének, pak tyto řádky leží ve stejné množině $R_i$. Dokažte, že taková matice $A$ je totálně unimodulární.*

*Nápověda: vzpomeňte si na Laplaceův rozvoj pro počítání determinantu.*

**Příklad 3.** *Dokažte následující dvě tvrzení a zkuste si rozmyslet případné algoritmické důsledky pro známé problémy.*

*(a)* Maticí incidence orientovaného grafu *$G = (V, E)$ je matice $A_G \in \{-1, 0, 1\}^{|V| \times |E|}$, kde $(A_G)_{v,e} = -1$, pokud $e = (v, u)$, $(A_G)_{v,e} = 1$, pokud $e = (u, v)$, a $(A_G)_{v,e} = 0$ jinak. Dokažte, že $A_G$ je totálně unimodulární.*

*(b)* Maticí incidence neorientovaného grafu *$G = (V, E)$ je matice $A_G \in \{0, 1\}^{|V| \times |E|}$, kde $(A_G)_{v,e} = 1$, je-li $v \in e$, a $(A_G)_{v,e} = 0$ jinak. Dokažte, že matice incidence neorientovaného grafu $G$ je totálně unimodulární právě tehdy, když je $G$ bipartitní.*

*Nápověda: v obou částech se může hodit znění předešlého příkladu.*

**Příklad 4.** *Nalezněte celočíselný mnohostěn $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, kde $A$ je matice s rozměry alespoň $3 \times 3$ a $A$ i $\mathbf{b}$ jsou celočíselné, ale $A$ není totálně unimodulární. Může navíc $A$ obsahovat pouze prvky $-1$, 0 a 1? A co když zakážeme i $-1$?*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/