

Lineární programování a kombinatorická optimalizace –

3. teoretický domácí úkol*

12. května 2025

Řešení můžete odevzdávat do **30. června**. Jsou povolena i opakovaná odevzdání.

1 Totální unimodularita

Příklad 1. Rozhodněte, jestli je zadaná matice totálně unimodulární:

[4]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 2. Vezměme si sloupcový vektor $\mathbf{v} \in \{0,1\}^n$. Řekneme, že $\mathbf{v}$ je intervalový, pokud má $\mathbf{v}$ hodnoty 1 za sebou v právě jednom souvislém intervalu (případně i nulové délky). Matice M je intervalová, pokud všechny její sloupce jsou intervalovými vektory.

(a) Bud' $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ matice taková, že pro každou její podmatici $A' \in \mathbb{Z}^{k \times k}$ existuje unimodulární matice $B \in \mathbb{Z}^{k \times k}$ taková, že BA' je singulární nebo unimodulární. Dokažte, že A je totálně unimodulární. [4]

(b) Dokažte, že každá intervalová matice M je totálně unimodulární. [5]

Nápověda: může se hodit předešlá část a nějaké tvrzení z přednášky.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~ballo/>