

# Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 9. cvičení\*

14. dubna 2025

## 1 Dualita

Mějme následující úlohu lineárního programování  $P$  s  $n$  proměnnými a  $m$  podmínkami:

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (\text{P})$$

Té budeme říkat *primární lineární program* (neboli *primár*). Jeho *duálním lineárním programem* (neboli *duálem*) nazveme následující lineární program  $D$  s  $m$  proměnnými a  $n$  podmínkami:

$$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \text{ za podmínek } A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \text{ a } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \quad (\text{D})$$

Vysvětlení: při řešení  $P$  se snažíme najít lineární kombinaci  $m$  podmínek soustavy  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$  s nějakými koeficienty  $y_1, \dots, y_m \geq 0$  takovými, aby výsledná nerovnost měla  $j$ -tý koeficient aspoň  $c_j$  pro každé  $j \in \{1, \dots, n\}$  a pravá strana přitom byla co nejmenší.

Ukazuje se, že program  $D$  „hlídá“ program  $P$  podle následujícího výsledku, ze kterého například vidíme, že je-li  $P$  neomezený, pak  $D$  nemá přípustné řešení.

**Věta 1** (Slabá věta o dualitě). *Pro každé přípustné řešení  $\mathbf{x}$  úlohy  $P$  a každé přípustné řešení  $\mathbf{y}$  úlohy  $D$  platí  $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$ .*

Následující zesílení je asi nejdůležitějším teoretickým výsledkem o lineárních programech.

**Věta 2** (Silná věta o dualitě). *Pro úlohy  $P$  a  $D$  nastane právě jedna z následujících čtyř možností:*

- (a) Ani  $P$  ani  $D$  nemá přípustné řešení.
- (b) Úloha  $P$  je neomezená a  $D$  nemá přípustné řešení.
- (c) Úloha  $P$  nemá přípustné řešení a  $D$  je neomezená.
- (d) Úlohy  $P$  i  $D$  mají přípustné řešení. Pak mají i optimální řešení  $\mathbf{x}^*$  a  $\mathbf{y}^*$  a platí  $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}^*$ .

Duální lineární programy můžeme uvážit i pro lineární programy v obecném tvaru, stačí postupovat podle následující tabulky. Postup funguje zleva doprava i zprava doleva.

	Primární úloha	Duální úloha
Proměnné	$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$	$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$
Matice	$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$	$A^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$
Pravá strana	$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$	$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$
Účelová funkce	$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
Podmínky	$i$ -tá podmínka má $\leq$	$y_i \geq 0$
	$\geq$	$y_i \leq 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	$j$ -tá podmínka má $\geq$
	$x_j \leq 0$	$\leq$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$

---

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

**Příklad 1.** Vytvořte duální program  $D$  pro následující primární lineární program  $P$ :

$$\begin{aligned} \max & 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ & 5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

**Příklad 2.** Vytvořte duální program  $D$  pro následující primární lineární program  $P$ :

$$\begin{aligned} \max & x_1 - 2x_2 + 3x_4 \\ & x_2 - 6x_3 + x_4 \leq 4 \\ & -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ & 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 \geq 5 \\ & x_2 \leq 0 \\ & x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

**Příklad 3.** Dokažte nebo vyvráťte tvrzení:

- (a) Pro každý lineární program  $P$  platí, že duál duálu  $P$  je původní program  $P$ .
- (b) Pokud má lineární program optimum s celočíselnými proměnnými, tak má celočíselné optimální řešení i duál.

**Příklad 4.** (\*) Mějme následující úlohu lineárního programování  $P$ :

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmíněk } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Pomocí duality zkonstruujte soustavu nerovnic, pro kterou ze souřadnic libovolného řešení lze vyčíst optimální řešení pro  $P$ .

Tím ukážeme, že asymptotická složitost problému rozhodnout, zda je daný mnohostěn neprázdný, je stejná jako složitost problému nalezení optimálního řešení úlohy lineárního programování. Nebo ještě jinak: nalezení přípustného řešení lineárního programu je asymptoticky stejně obtížné jako nalezení optimálního řešení.

**Příklad 5.** Zformulujte relaxovanou úlohu lineárního programování pro Set cover problem: vyberte z množin  $S_1, \dots, S_m \subseteq \{1, \dots, n\}$  co nejméně množin tak, aby jejich sjednocení pokrývalo celou nosnou množinu  $\{1, \dots, n\}$ . Napište duál vaší úlohy a nahlédněte, jaký problém řeší jako relaxace.