Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 6. cvičení*

24. března 2025

1 Simplexová metoda

Úloha lineárního programování v rovnicovém tvaru je zapsaná jako max $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Předpokládejme, že $\operatorname{rank}(A) = m$.

Báze je množinou $B \subseteq \{1, \dots n\}$ indexů proměnných takovou, že A_B je regulární, kde A_B značí podmatici A indexovanou sloupci z B. *Bázickým řešením* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ odpovídající bázi B je řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, pro které platí $x_i = 0$ pro každé $i \notin B$. *Přípustná báze* je taková, že jí odpovídající bázické řešení $\mathbf{x}$ je přípustné, tedy $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Vzorový řešený příklad:

$$
\begin{aligned}
\max 2x_1 + x_2 & \\
-x_1 + x_2 &\leq 1 \\
x_1 &\leq 3 \\
x_2 &\leq 2 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Upravíme na rovnicový tvar zavedením nových proměnných $s_1, s_2, s_3 \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
\max 2x_1 + x_2 & \\
-x_1 + x_2 + s_1 &= 1 \\
x_1 + s_2 &= 3 \\
x_2 + s_3 &= 2 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Začneme v nějakém přípustném bázickém řešení. Zde lze zvolit původní proměnné $x_1 = x_2 = 0$ a $(s_1, s_2, s_3) = \mathbf{b}^\top = (1, 3, 2)$. Pak přepíšeme soustavu tak, aby bázické proměnné s_1, s_2, s_3 byly na levé straně:

$$
\begin{aligned}
&\max 2x_1 + x_2 \\
s_1 &= 1 + x_1 - x_2 \\
s_2 &= 3 - x_1 \\
s_3 &= 2 \qquad\; - x_2
\end{aligned}
$$

Vstoupíme x_1 do báze, protože má nejvyšší kladný koeficient v účelové funkci, a vystoupíme s_2:

$$
\begin{aligned}
&\max 6 + x_2 - 2s_2 \\
s_1 &= 4 - x_2 - s_2 \\
x_1 &= 3 \qquad\; - s_2 \\
s_3 &= 2 - x_2
\end{aligned}
$$

Vstoupíme x_2 do báze, protože má nejvyšší kladný koeficient v účelové funkci, a vystoupíme s_3:

$$
\begin{aligned}
&\max 8 - 2s_2 - s_3 \\
s_1 &= 2 - s_2 + s_3 \\
x_1 &= 3 - s_2 \\
x_2 &= 2 \qquad\; - s_3
\end{aligned}
$$

Není, co zlepšovat, takže máme optimum pro $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $s_1 = 2$ a $s_2 = s_3 = 0$ s hodnotou účelové funkce 8.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

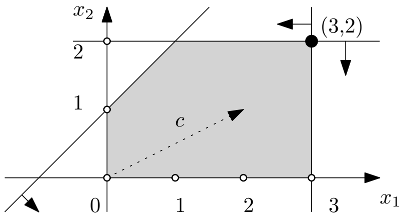

Figure 1: Uvedené řešení odpovídá posunu z počátku do vrcholu $(3, 0)$ a poté do $(3, 2)$.

Pseudokód simplexové metody:

1. *Vstup:* Úloha lineárního programování P v rovnicovém tvaru, max $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Předpokládáme, že $\operatorname{rank}(A) = m$.

2. *Nalezni počáteční bázické přípustné řešení*: Přenásob soustavu, aby $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, a vyřeš simplexovou metodou pomocnou úlohu $\max -x_{n+1} - \cdots - x_{n+m}$ za $\overline{A}\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$, $\overline{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, kde $\overline{A} = (A \mid I_m) \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$ a $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{n+m})$. Tato úloha má snadné počáteční řešení $(0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)$. Pokud je optimální hodnota záporná, pak **skonči**, protože neexistuje přípustné řešení pro P. Jinak je optimem $(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ a pak je $(x_1, \dots, x_n)$ počátečním řešením pro P.

3. *Spočítej simplexovou tabulku*: Pro přípustnou bázi $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ přepiš P na $\max z$ pro

$$\begin{aligned} z &= z_0 + \mathbf{r}^\top \mathbf{x}_N \text{ za podmínek} \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{p} + Q\mathbf{x}_N, \end{aligned}$$

   kde $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $z_0 \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{n-m}$.

4. *Vrať případné optimum*: Pokud $\mathbf{r} \leq \mathbf{0}$, tak **skonči** a vrať optimum s bázickými proměnnými $\mathbf{x}_B = \mathbf{p}$ a nebázickými proměnnými $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$.

5. *Vyber proměnnou vstupující do báze*: Podle zvoleného pivotovacího pravidla vyber vstupující proměnnou x_t z proměnných x_j s $j \in N$ a $r_j > 0$. Protože není $\mathbf{r} \leq \mathbf{0}$, tak vstupující proměnná x_t vždy existuje. Volbou x_t chceme zvýšit hodnotu účelové funkce.

6. *Vyber proměnnou vystupující z báze*: Uvaž řádky i simplexové tabulky, ve kterých se x_t objevuje, a vyber z nich vystupující proměnnou x_s tak, aby $\frac{-p_s}{Q_{s,t}} = \min_{i \in B : Q_{i,t} < 0} \frac{-p_i}{Q_{i,t}}$. Speciálně tedy musí platit $Q_{s,t} < 0$. Tato volba x_s zajišťuje, že nové bázické řešení je přípustné.

   Pokud vystupující proměnná neexistuje (t-tý sloupec Q je nezáporný), pak **skonči**, protože úloha P je neomezená. Je-li na výběr více vystupujících proměnných, tak vyber podle pivotovacího pravidla, či libovolně, pokud pravidlo ani tak vystupující proměnnou nespecifikuje.

7. *Aktualizuj simplexovou tabulku a iteruj*: Zvol $(B \setminus \{s\}) \cup \{t\}$ jako novou bázi a přepiš simplexovou tabulku tak, aby odpovídala této nové bázi. Pokračuj krokem 4.

V kroce 5 se může stát, že nově vybraná vstupující proměnná nevylepší hodnotu účelové funkce a pak říkáme, že řešení je *degenerované*. To například nastává, pokud je v předešlém kroce na výběr více vystupujících proměnných. U degenerovaných řešení může dojít k *zacyklení* simplexové metody, kdy se nevylepšuje hodnota účelové funkce a algoritmus se nikdy nezastaví. Zacyklení se dá zabránit volbou vhodného pivotovacího pravidla.

Příklady pivotovacích pravidel pro výběr vstupující proměnné x_t a vystupující x_s:

1. *Dantzigovo pravidlo:* Vyber $t \in N$ s maximálním r_t a zvol x_s libovolně z možných proměnných.

2. *Blandovo pravidlo:* Vyber nejmenší možné $t \in N$ a pro něj nejmenší možné $s \in B$. Brání zacyklení, ale je pomalé.

Existuje spousta dalších pivotovacích pravidel (lexikografické, náhodné a další).

Příklad 1. *Vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu lineárního programování:*

$$\begin{aligned}\max 3x_1 + 4x_2 & \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Příklad 2. *Vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu lineárního programování:*

$$\begin{aligned}\max 2x_1 - x_2 + 2x_3 & \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leq 20 \\ x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

Příklad 3. *Převeďte následující soustavu nerovnic do rovnicového tvaru:*

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_2 + x_3 &\leq 12 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 &\geq 7 \\ x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{R} \\ x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

Převeďte výslednou úlohu v rovnicovém tvaru na lineární program, ze kterého půjde získat bázické přípustné řešení.

Mějme libovolný lineární program s m lineárními nerovnicemi či rovnicemi a n proměnnými. Kolik proměnných nám vždy stačí v rovnicovém tvaru této úlohy a kolik v pomocném LP pro hledání přípustného bázického řešení?