

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 4. cvičení*

10. března 2025

1 Základní pojmy z geometrie

1.1 Afinita

Afinní prostor $A \subseteq \mathbb{R}^d$ má tvar $L + \mathbf{v}$ pro nějaký lineární prostor L a vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$. Afinní prostor jde určit pomocí soustavy rovnic $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dimenze afinního prostoru A je rovna dimenzi jeho přidruženého lineárního prostoru L . Afinní kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^d$ je vektor $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Množina $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afinně nezávislá*, pokud platí, že žádný vektor $\mathbf{v} \in V$ není afinní kombinací ostatních vektorů z V . *Afinní obal* $\text{af}(V)$ množiny vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je množina všech afinních kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V .

Příklad 1. *Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je afinní prostor. Z definice je pak A tvaru $A = L + \mathbf{v}$ pro nějaký lineární prostor L a nějaký vektor \mathbf{v} . Dokažte, že pro dané $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ existuje nanejvýš jeden lineární prostor $L \subseteq \mathbb{R}^d$ takový, že $A = L + \mathbf{v}$.*

(*) Charakterizujte všechny vektory \mathbf{v} , které posunou lineární prostor L na afinní prostor A .

1.2 Nadroviny

Nadrovina je libovolný afinní prostor v \mathbb{R}^d dimenze $d - 1$. V rovině nadroviny odpovídají přímkám a v \mathbb{R}^3 zase rovinám. Nadrovinu lze zapsat jako $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d: \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = h\}$ pro $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ a $h \in \mathbb{R}$. Nadrovina rozděluje prostor \mathbb{R}^d na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

Příklad 2. (a) *Mohou se v \mathbb{R}^4 dvě roviny protínat v jednom bodě? Jak mohou vypadat průniky dvou rovin v \mathbb{R}^4 ?*

(b) *Mohou se v \mathbb{R}^5 dva afinní prostory dimenze 3 protínat v jednom bodě?*

1.3 Konvexita

Množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ je *konvexní*, pokud pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ a $t \in [0, 1]$ platí $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in K$. Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v K je celá v K . Vektor \mathbf{x} je *konvexní kombinací* vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, pokud $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ splňují $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Množina $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je v *konvexní poloze* (neboli *konvexně nezávislá*), pokud platí, že žádný vektor $\mathbf{v} \in V$ není konvexní kombinací ostatních vektorů z V . *Konvexní obal* $\text{conv}(V)$ množiny vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je množina konvexních kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V .

Příklad 3. *Víme, že v \mathbb{R}^d je maximálně d lineárně nezávislých vektorů a maximálně $d + 1$ afinně nezávislých vektorů. Kolik nejvýše je v \mathbb{R}^d konvexně nezávislých vektorů?*

1.4 Mnohostěny

Konvexní mnohostěn je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně je konvexním mnohostěnem libovolná množina bodů tvaru $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d: A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ pro nějakou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Nechť P je konvexní mnohostěn a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$. Jestliže pro každé $\mathbf{x} \in P$ platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq t$ a zároveň existuje $\mathbf{x} \in P: \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t$, pak množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d: \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t\}$ tvoří *tečnou nadrovinu* H mnohostěnu P . Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem P pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P . K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* \emptyset a P . Stěny dimenzí 0, 1 a $d - 1$ nazýváme *vrcholy*, *hrany* a *fasety*. Konvexní mnohostěn je *omezený*, pokud je obsažený v kouli s konečně velkým poloměrem.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

Příklad 4. Jaký je počet stěn krychle a osmistěnu v \mathbb{R}^3 ?

Příklad 5. Mějme mnohostěn $P = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \ \& \ x \leq 2\}$. Převeďte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).

Příklad 6. Nechť P je konvexní mnohostěn v \mathbb{R}^d a nechtě F a G jsou jeho stěny. Dokažte, že $F \cap G$ je stěnou P .

Přesněji $F = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \alpha\}$ a $G = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{b}^\top \mathbf{x} = \beta\}$, kde platí $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq \alpha$ a $\mathbf{b}^\top \mathbf{x} \leq \beta$ pro každé $\mathbf{x} \in P$. Uveďte formuli, která stěnu $F \cap G$ určuje.