

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 3. cvičení*

3. března 2025

1 Ostré nerovnosti

Příklad 1. *Lineární programy a ostré nerovnosti.*

(a) *Má-li lineární program ostré nerovnosti, pak nemusí mít optimum, i když je hodnota optima omezená. Zkonstruuje úlohu LP s ostrými nerovnostmi, která:*

- *má (triviální) konečný horní odhad na hodnotu optima,*
- *má přípustné řešení, ale*
- *nemá optimální řešení.*

Toto se pro lineární program bez ostrých nerovností nemůže stát. Pokud je lineární program omezený a existuje přípustné řešení, tak také existuje optimální řešení.

(b) *Mějme systém lineárních nerovnic, který obsahuje i ostré nerovnosti. Například tento:*

$$\begin{aligned}5x + 3y &\leq 8 \\2x - 5z &< -3 \\6x + 5y + 2w &= 5 \\3z + 2w &> 5 \\x, y, z, w &\geq 0\end{aligned}$$

Zformulujte úlohu lineárního programování, která zjistí, zda má tento systém přípustné řešení.

(c) (*) *Navrhněte postup, který pro úlohu LP s ostrými nerovnostmi rozhodne, jestli má optimální řešení.*

Příklad 2. *Oddělování přímky: navrhněte řešení následujícího problému s využitím předchozího příkladu. V rovině je dáno m bílých bodů b_1, \dots, b_m a n černých bodů c_1, \dots, c_n . Chceme zjistit, zda existuje přímka, která má všechny bílé body na jedné straně a všechny černé body na druhé straně (na přímce žádný bod být nemůže).*

2 Další NP-těžké úlohy a celočíselné lineární programy

Příklad 3. *Kocourkovští radní se rozhodli, že přílepsi obecnímu rozpočtu rozmístěním radarů na měření rychlosti na křižovatkách. Pro správnou funkčnost je třeba, aby každý úsek ulice mezi dvěma křižovatkami měl alespoň jednu z koncových křižovatek pokrytou. Dodavatel si účtuje fixní poplatek $c > 0$ za každou křižovátku, na kterou bude systém nainstalován.*

Zformulujte celočíselný lineární program, který umožní radním optimálně naplánovat rozmístění měřicího systému. Zkuste zjistit, zda jde jeho relaxace použít pro aproximaci.

Příklad 4. *Díky navýšení rozpočtu plánují Kocourkovští radní tuto sobotu uspořádat festival představující aktivity dostupné občanům (spolek dobrovolných hasičů, městská dechová hudba, vodácký oddíl, ...). Kvůli pestrosti festivalu chtějí radní, aby probíhalo co nejvíce akcí zároveň. Musí se ale vypořádat s tím, že místní jsou velice aktivní. Mnozí organizátoři jsou důležití pro několik jednotlivých akcí a ty proto nemůžou proběhnout v daný den najednou. Radní dostali seznamy jednotlivých akcí a vědí, které akce jsou spolu v konfliktu.*

Zformulujte celočíselný lineární program pro naplánování co nejnabitějšího festivalu. Zkuste zjistit, zda jde jeho relaxace použít pro aproximaci.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~ballo/>