

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 13. cvičení*

19. května 2025

1 Matroidy

Pro množinu S a systém $\mathcal{I} \subseteq 2^S$ nazveme pár $(S, \mathcal{I})$ *systémem nezávislosti*, pokud platí

(A1) $\emptyset \in \mathcal{I}$,

(A2) pokud $X \subseteq Y \in \mathcal{I}$, pak $X \in \mathcal{I}$ (uzavřenost na podmnožiny).

Množiny $X \in \mathcal{I}$ se nazývají *nezávislé* a nezávislá množina, která je maximální vzhledem k inkluzi, se nazývá *báze*. Pro $A \subseteq S$ je *bází* A nezávislá množina $X \subseteq A$, která je maximální vzhledem k inkluzi. Jako *rank* $r(A)$ množiny $A \subseteq S$ označíme velikost největší nezávislé množiny obsažené v A , neboli $r(A) = \max\{|Y| : Y \in \mathcal{I}, Y \subseteq A\}$.

Mějme systém nezávislosti $(S, \mathcal{I})$ a funkci $c: S \rightarrow \mathbb{R}$. Spousta problémů v kombinatorické optimalizaci je speciálním případem následujícího problému.

Problém pro systém nezávislosti: Najdi $X \in \mathcal{I}$ maximalizující $c(X) = \sum_{e \in X} c(e)$.

Proměnné: $x_e \geq 0$ pro každé $e \in S$

Účelová funkce: $\max \sum_{e \in S} c(e)x_e$

Podmínky: $x(A) = \sum_{e \in A} x_e \leq r(A)$ pro každé $A \subseteq S$

Pokud systém nezávislosti $(S, \mathcal{I})$ splňuje následující podmínku, pak je *matroidem*:

(A3) pokud $X, Y \in \mathcal{I}$ a $|X| > |Y|$, pak existuje $e \in X \setminus Y$ takové, že $Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ (výměnná vlastnost).

Matroidy zobecňují koncept nezávislosti, jehož konkrétním příkladem je například lineární nezávislost ve vektorových prostorech. Matroidy jsou pro nás zajímavé, protože následující jednoduchý hladový algoritmus nad nimi dovede řešit optimalizační problémy jako například Problém pro systém nezávislosti.

Algorithm 1.1: GREEDY($S, \mathcal{I}, c$)

Input : Matroid $(S, \mathcal{I})$ a funkce $c: S \rightarrow \mathbb{R}$.

Output : $X \in \mathcal{I}$ maximalizující $c(X)$.

$A \leftarrow \emptyset$,

if existuje $e \in S$ takové, že $A \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ a $c(e) > 0$

do $\begin{cases} \text{najdi takové } e \text{ s maximálním } c(e), \\ A \leftarrow A \cup \{e\}. \end{cases}$

Output $X = A$.

Hladový algoritmus najde optimální řešení LP formulace Problému pro systém nezávislosti daného matroidu. Navíc analýza tohoto algoritmu ukazuje, že *polytop matroidu* $(S, \mathcal{I})$ daný podmínkami $x_e \geq 0$ pro $e \in S$ a $x(A) \leq r(A)$ pro $A \subseteq S$ je celočíselný.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

Příklad 1. Vhodnou volbou S , $\mathcal{I}$ a c ukažte, že následující problémy jsou speciálními případy Problému pro systém nezávislostí. Ve kterých případech je pak $(S, \mathcal{I})$ matroidem?

- (a) TSP: v grafu $G = (V, E)$ váženém funkcí $f: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ najděte hamiltonovskou kružnici minimální váhy.
- (b) Maximální párování: v grafu $G = (V, E)$ najděte maximální párování.
- (c) Les maximální váhy: v grafu $G = (V, E)$ váženém funkcí $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ najděte les maximální váhy.
- (d) Problém batohu: pro čísla $w_1, \dots, w_n, c_1, \dots, c_n$ a W najděte množinu $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ maximalizující $\sum_{i \in S} c_i$ a splňující $\sum_{i \in S} w_i \leq W$.
- (e) Minimální kostra: v grafu $G = (V, E)$ váženém funkcí $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ najděte kostru minimální váhy.
- (f) Lineárně nezávislé sloupce: z matice $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ nad tělesem $\mathbb{T}$ chceme vybrat co nejvíc lineárně nezávislých sloupců.

Příklad 2. Dokažte, že axiom (A3) je ekvivalentní s následujícím tvrzením: pro každé $A \subseteq S$ mají všechny báze množiny A stejnou velikost.

Příklad 3. Buď $G = (V, E)$ graf. Uvažte systém nezávislostí $(E, \mathcal{I})$, kde $\mathcal{I}$ obsahuje párování v grafu G . Dokažte, že hladový algoritmus na tomto systému najde řešení aspoň poloviční velikosti optima.

Příklad 4. Mějme systém nezávislostí $(S, \mathcal{I})$. O každé množině $z \in 2^S \setminus \mathcal{I}$ řekneme, že je závislá. Minimální závislé množiny vzhledem k inkluzi nazveme kružnice.

- (a) Pro kružnici C dokažte, že $M_C = (S, \mathcal{F}_C = \{F \subseteq S: C \setminus F \neq \emptyset\})$ je matroidem.
- (b) Dokažte, že každý systém nezávislostí je průnikem konečně mnoha matroidů.