

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 12. cvičení*

12. května 2025

1 Totální unimodularita

Čtvercová matice A je *unimodulární*, pokud je celočíselná a platí $\det A \in \{-1, 1\}$. Matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je *totálně unimodulární*, pokud každá její čtvercová podmatice má determinant rovný -1 , 0 nebo 1 .

Totálně unimodulární matice jsou pro nás zajímavé, protože mnohostěn $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ má celočíselné vrcholy pro každé $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$, pokud je A totálně unimodulární. Na takových mnohostěnech dokážeme pro každé $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ najít v polynomiálním čase celočíselné optimum. Neboli příslušné celočíselné lineární programy dokážeme řešit efektivně.

Několik faktů o unimodulárních a totálně unimodulárních maticích:

- (a) Součin a inverze unimodulárních matic jsou unimodulární matice.
- (b) Unimodulární matice jsou právě ty celočíselné matice, jejichž inverze je celočíselná.
- (c) Unimodulární matice může obsahovat i jiná čísla než 0 a ± 1 (viz matice A dole).
- (d) Součin totálně unimodulárních matic nemusí být totálně unimodulární (viz druhá mocnina matice B dole).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (e) Existuje polynomiální algoritmus na rozpoznávání totální unimodularity.

Příklad 1. *Dokažte, že pokud má matice $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ inverzní matici, která je rovněž celočíselná, pak je A unimodulární.*

Příklad 2. *Mějme matici $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$, ve které každý sloupec obsahuje nanejvýš dva nenulové prvky. Nechť lze řádky matice A rozdělit do dvou množin R_1 a R_2 takových, že jsou-li ve sloupci dva nenulové prvky stejného znaménka, pak oba patří do různých množin R_i a R_j a pokud sloupec obsahuje dva nenulové prvky různých znamének, pak tyto řádky leží ve stejné množině R_i . Dokažte, že taková matice A je totálně unimodulární.*

Nápověda: vzpomeňte si na Laplaceův rozvoj pro počítání determinantu.

Příklad 3. *Dokažte následující dvě tvrzení a zkuste si rozmyslet případné algoritmické důsledky pro známé problémy.*

- (a) *Maticí incidence orientovaného grafu $G = (V, E)$ je matice $A_G \in \{-1, 0, 1\}^{|V| \times |E|}$, kde $(A_G)_{v,e} = -1$, pokud $e = (v, u)$, $(A_G)_{v,e} = 1$, pokud $e = (u, v)$, a $(A_G)_{v,e} = 0$ jinak. Dokažte, že A_G je totálně unimodulární.*
- (b) *Maticí incidence neorientovaného grafu $G = (V, E)$ je matice $A_G \in \{0, 1\}^{|V| \times |E|}$, kde $(A_G)_{v,e} = 1$, je-li $v \in e$, a $(A_G)_{v,e} = 0$ jinak. Dokažte, že matice incidence neorientovaného grafu G je totálně unimodulární právě tehdy, když je G bipartitní.*

Nápověda: v obou částech se může hodit znění předešlého příkladu.

Příklad 4. *Nalezněte celočíselný mnohostěn $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$, kde A je matice s rozměry alespoň 3×3 a A i $\mathbf{b}$ jsou celočíselné, ale A není totálně unimodulární. Může navíc A obsahovat pouze prvky -1 , 0 a 1 ? A co když zakážeme i -1 ?*

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>