

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 10. cvičení*

28. dubna 2025

1 Dualita její aplikace

Příklad 1. Sestrojte duální úlohu k lineární relaxaci úlohy Nalezení minimálního vrcholového pokrytí ve váženém grafu $G = (V, E, w)$, kde $w: V \rightarrow \mathbb{R}^+$. Pro připomenutí, tato relaxace vypadá následovně:

$$\begin{aligned}\text{Proměnné:} \quad & x_v \geq 0 \text{ pro každé } v \in V \\ \text{Účelová funkce:} \quad & \min \sum_{v \in V} w(v)x_v \\ \text{Podmínky:} \quad & x_u + x_v \geq 1 \text{ pro každé } \{u, v\} \in E\end{aligned}$$

Jaký problém řeší duální úloha pro jednotkové váhy?

Síť je uspořádaná čtveřice (G, z, s, c) , kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, neboli $E \subseteq V \times V$, z a s jsou dva různé vrcholy grafu G (zvané zdroj a stok) a kapacita $c: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany. Tok v síti je každá funkce $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každou hranu $e \in E$ a

$$\sum_{v: (u,v) \in E} f(u,v) = \sum_{v: (v,u) \in E} f(v,u)$$

pro každý vrchol $u \in V$ mimo stok a zdroj. Velikost toku je

$$w(f) = \sum_{v: (z,v) \in E} f(z,v) - \sum_{v: (v,z) \in E} f(v,z).$$

Řezem v síti je množina R hran vedoucích z množiny vrcholů Z do množiny vrcholů $S = V \setminus Z$, kde $z \in Z$ a $s \in S$. Kapacitou řezu R je $\sum_{e \in R} c(e)$.

Příklad 2. Uvažme následující úlohu lineárního programování pro problém Nalezení maximálního toku v síti $(G = (V, E), z, s, c)$:

$$\begin{aligned}\text{Proměnné:} \quad & x_e \geq 0 \text{ pro každé } e \in E \\ \text{Účelová funkce:} \quad & \max x_{s,z} \\ \text{Podmínky:} \quad & \sum_{u: (u,v) \in E} x_{u,v} - \sum_{u: (v,u) \in E} x_{v,u} = 0 \text{ pro každé } v \in V \\ & x_e \leq c(e) \text{ pro každé } e \in E\end{aligned}$$

(V tomto programu jsme přidali hranu (s, z) „nekonečně“ velké kapacity, čímž tok cirkuluje a program se tak zjednoduší uvedením podmínek Kirchhoffových zákonů i pro zdroj a stok).

Sestrojte duál této úlohy a (*) nahlédněte, že odpovídá relaxaci úlohy Nalezení řezu minimální kapacity v síti.

Příklad 3. (a) Uvažte následující lineární program pro orientovaný graf $G = (V, E)$ a jeho vrcholy s a t :

$$\begin{aligned}\text{Proměnné:} \quad & x_v \in \mathbb{R} \text{ pro každé } v \in V \\ \text{Účelová funkce:} \quad & \max x_t \\ \text{Podmínky:} \quad & x_s = 0 \\ & x_v - x_u \leq 1 \text{ pro každé } (u, v) \in E\end{aligned}$$

Nahlédněte, že řeší úlohu Nalezení délky nejkratší cesty mezi vrcholy s a t v G . V účelové funkci je skutečně maximum, i když chceme nalézt nejkratší cestu.

(b) Zkonstruujte duál k předešlé úloze. Jaký problém duál řeší?

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

2 Komplementarita

Věta 1 (Věta o komplementaritě). *Mějme úlohu lineárního programování P a její duál D v následující formě:*

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}, A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (\text{P})$$

$$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}, A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \quad (\text{D})$$

Mějme přípustná řešení $\mathbf{x}^$ a $\mathbf{y}^*$ pro P a D a označme jako $A_{j,i}$ prvek matice A na pozici (j, i) . Pak $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ jsou optimálními řešeními úloh P a D právě tehdy, když platí následující dva vztahy*

$$x_i = 0 \text{ nebo } \sum_{j=1}^m A_{j,i} y_j = c_i \text{ pro každé } i \in \{1, \dots, n\} \text{ a}$$

$$y_j = 0 \text{ nebo } \sum_{i=1}^n A_{j,i} x_i = b_j \text{ pro každé } j \in \{1, \dots, m\}.$$

První vztah říká, že pro každé i je buď i -tá proměnná primáru nulová nebo je i -tá podmínka duálu těsná. Druhý vztah analogicky říká, že pro každé j je buď j -tá proměnná duálu nulová nebo je j -tá podmínka primáru těsná. Tento výsledek nám pomůže ověřovat optimalitu řešení či například určovat optima duálu z optim primáru.

Příklad (Řešený příklad). *Mějme následující primár P a duál D :*

$$\begin{aligned} \max & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 12 \\ & x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 7 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{P})$$

a

$$\begin{aligned} \min & 12y_1 + 7y_2 + 10y_3 \\ & 3y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 2 \\ & y_1 - 3y_2 + y_3 \geq 4 \\ & y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ & 4y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{D})$$

Buď $\mathbf{x}^ = (0, \frac{52}{5}, 0, \frac{2}{5})$ optimem v P . Určete optimum v D .*

Řešení. Podle Věty o komplementaritě jsou 2. a 4. nerovnost v D splněny těsně, protože $x_2 \neq 0$ a $x_4 \neq 0$. V primáru P po dosazení hodnot $\mathbf{x}^*$ vidíme, že 2. nerovnost v P není těsná a podle Věty o komplementaritě tedy máme $y_2 = 0$. Dosazením $y_2 = 0$ do 2. a 4. nerovnosti v D zapsaných s rovností dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} y_1 + y_3 &= 4 \\ 4y_1 - y_3 &= 1, \end{aligned}$$

jejíž řešení $\mathbf{y}^* = (1, 0, 3)$ je přípustné pro D a tedy je optimem v D . □

Příklad 4. *Optimálním řešením duální úlohy D k následující úloze P je $\mathbf{y}^* = (0, 7, \frac{11}{2}, 0)$.*

$$\begin{aligned} \max & 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ & 5x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 12 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 \leq -1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{P})$$

- (a) Spočtěte pomocí komplementarity optimální řešení primáru P .
- (b) Nalezněte vektory $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ a $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$, které splňují oba vztahy z Věty o komplementaritě, ale ani $\mathbf{x}$ a ani $\mathbf{y}$ nejsou optimálními řešeními pro P a D .

Příklad 5. Mějme následující zadání duálu D úlohy P :

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 4y_4 \\
 & y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5 \\
 & y_1 + y_2 + 2y_3 + 3y_4 = 3 \\
 & y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
 \end{aligned} \tag{D}$$

Přípustným řešením primáru P je $\mathbf{x}' = (4, 0, -1)$. Je toto řešení primáru optimem v P ?