

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 5. cvičení*

25. března 2024

1 Mnohostěny

Množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ je *konvexní*, pokud pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ a $t \in [0, 1]$ platí $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in K$. Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v K je celá v K . *Konvexní mnohostěn* je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně je konvexním mnohostěmem libovolná množina bodů tvaru $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ pro nějakou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Nechť P je konvexní mnohostěn a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$. Jestliže pro každé $\mathbf{x} \in P$ platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq t$ a zároveň existuje $\mathbf{x} \in P : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t$, pak množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t\}$ tvoří *tečnou nadrovinu* H mnohostěnu P . Průniky tečných nadrovin s mnohostěmem P pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P . K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* \emptyset a P . Stěny dimenzí 0, 1 a $d-1$ nazýváme *vrcholy*, *hrany* a *fasety*.

Příklad 1. Dokažte, že množina všech optimálních řešení lineárního programu $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, kde $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, je konvexní množina.

Příklad 2. Mějme mnohostěn $P \subseteq \mathbb{R}^3$ určený množinou vrcholů

$$\mathbf{a} = (2, 1, 6), \quad \mathbf{b} = (0, -5, 0), \quad \mathbf{c} = (-2, 2, -1), \quad \mathbf{d} = (0, -4, 0), \quad \mathbf{e} = (0, 1, 1).$$

Pro každou z následujících rovin určete, zda je vůči P tečná, sečná či mimoběžná. Pro tečné roviny určete dimenzi příslušné stěny.

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x + 3y - 2z = 1\}$,

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 2\}$,

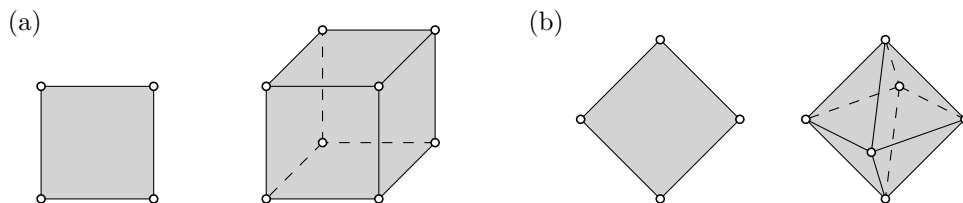
(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + z = 0\}$.

Příklad 3. Počty stěn pro známé mnohostěny v \mathbb{R}^d , kde $d \in \mathbb{N}$.

(a) Jaký je počet vrcholů a faset d -dimenzionální krychle $[0, 1]^d$?

(b) Jaký je počet vrcholů a faset d -dimenzionálního křížového mnohostěnu (neboli zobecněného osmistěnu)

$$\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_d| \leq 1\}?$$



Obrázek 1: Příklady (a) d -dimenzionální krychle a (b) d -dimenzionálního křížového mnohostěnu pro $d = 2, 3$.

Příklad 4. Nalezněte všechny vrcholy mnohostěnu zadaného následujícími nerovnostmi a zdůvodněte, že jiné vrcholy neexistují:

$$\begin{aligned}x + y + z &\leq 3, \\y + 2z &\leq 2, \\x, y, z &\geq 0.\end{aligned}$$

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

Příklad 5. Necht P je konvexní mnohostěn v \mathbb{R}^d a necht F a G jsou jeho stěny. Dokažte, že $F \cap G$ je stěnou P .

Přesněji $F = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \alpha\}$ a $G = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{b}^\top \mathbf{x} = \beta\}$, kde platí $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq \alpha$ a $\mathbf{b}^\top \mathbf{x} \leq \beta$ pro každé $\mathbf{x} \in P$. Uveďte formuli, která stěnu $F \cap G$ určuje.