Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 2. cvičení*

4. března 2024

1 Celočíselné lineární programy

Z minula víme, že spousta problémů se dá naformulovat jako úloha lineárního programování a poté lze efektivně řešit. Dnes si ukážeme, že vyžadujeme-li celočíselná řešení (což je mnohdy přirozený požadavek), pak obecně přijdeme o efektivní řešení, protože lze podobně naformulovat spoustu NP-těžkých problémů. Existují ovšem problémy, pro které je vždy nějaké optimální řešení celočíselné.

Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a vektory $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Potom úlohou *celočíselného (lineárního) programování* je následující optimalizační úloha

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ pro } \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n.$$

U úlohy *binárního (lineárního) programování* vyžadujeme podmínku $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ a u úlohy *smíšeného (lineárního) programování* jsou některé proměnné reálné a některé celočíselné.

Příklad 1. *Pro zadanou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a vektory $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ uvažujme příslušný celočíselný program a lineární program:*

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ pro } \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n, \tag{CP}$$

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{LP}$$

Předpokládejme, že oba programy jsou řešitelné a mají optimální řešení $\mathbf{x}^*_{CP}$ a $\mathbf{x}^*_{LP}$. Dokažte, že platí nerovnost $\mathbf{c}^\top\mathbf{x}^*_{CP} \leq \mathbf{c}^\top\mathbf{x}^*_{LP}$.

Příklad 2. *Zformulujte* Problém batohu *pomocí celočísleného lineárního programování. Tedy pro n předmětů, kde i-tý má nějakou váhu v_i a cenu c_i, máme batoh s danou nosností V a my se do něj snažíme naskládat předměty tak, abychom maximalizovali celkovou cenu předmětů v batohu.*

Příklad 3. *Zformulujte* SAT *pomocí celočísleného lineárního programování. Tedy pro n proměnných x_i a m klauzulí C_j, které jsou disjunkcemi literálů, chceme pro dano formuli φ, která je konjunkcí klauzulí, rozhodnout, zda je splnitelná.*

Příklad 4. *Student Maxim Dokonalý dostal na cvičení zadaný úkol: „Navrhněte celočíselný program pro* Problém obchodního cestujícího*, čili pro daný ohodnocený neorientovaný graf $G = (V, E, f)$, kde $f\colon E \to \mathbb{R}^+_0$, chceme najít Hamiltonovskou kružnici v G s nejmenším ohodnocením.“*

Maxim navrhuje toto řešení: „Pro každou hranu $e \in E$ zavedeme proměnnou $x_e \in \{0,1\}$, účelovou funkcí bude $\min \sum_{e\in E} f(e)x_e$ a zavedeme podmínky $\sum_{e\in E\colon u\in e} x_e = 2$ pro každý vrchol $u \in V$.“

Funguje řešení Maxima? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte, proč nefunguje, a ještě vymyslete lepší.

Příklad 5. *Pro* Problém 3-obarvitelnosti grafu*, neboli pro problém rozhodnout, zda lze vrcholy zadaného grafu G korektně obarvit třemi barvami, vymyslete vhodný celočíselný lineární program. Program by měl pouze otestovat, zda je G 3-obarvitelný.*

(*) Jak by mohla vypadat celočíselná úloha LP, která spočítá barevnost grafu G, neboli nalezne minimální k takové, že vrcholy G lze korektně obarvit k barvami?

Příklad 6. *Formulujte jako úlohu lineárního programování hledání optimální strategie pro hru* Kámen, nůžky, papír*. Tedy pro hru dvou hráčů s* nulovým součtem *(výhra jednoho hráče = prohra druhého hráče) a výplatní maticí:*

	kámen	*nůžky*	*papír*
kámen	0	1	−1
nůžky	−1	0	1
papír	1	−1	0

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/