

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 9. cvičení*

11. dubna 2023

1 Dualita

Mějme následující úlohu lineárního programování P s n proměnnými a m podmínkami:

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (\text{P})$$

Té budeme říkat *primární lineární program* (neboli *primár*). Jeho *duálním lineárním programem* (neboli *duálem*) nazveme následující lineární program D s m proměnnými a n podmínkami:

$$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \text{ za podmínek } A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \text{ a } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \quad (\text{D})$$

Vysvětlení: při řešení P se snažíme najít lineární kombinaci m podmínek soustavy $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ s nějakými koeficienty $y_1, \dots, y_m \geq 0$ takovými, aby výsledná nerovnost měla j -tý koeficient aspoň c_j pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ a pravá strana přitom byla co nejmenší.

Ukazuje se, že program D „hlídá“ program P podle následujícího výsledku, ze kterého například vidíme, že je-li P neomezený, pak D nemá přípustné řešení.

Věta 1 (Slabá věta o dualitě). *Pro každé přípustné řešení \mathbf{x} úlohy P a každé přípustné řešení \mathbf{y} úlohy D platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$.*

Následující zesílení je asi nejdůležitějším teoretickým výsledkem o lineárních programech.

Věta 2 (Silná věta o dualitě). *Pro úlohy P a D nastane právě jedna z následujících čtyř možností:*

- (a) Ani P ani D nemá přípustné řešení.
- (b) Úloha P je neomezená a D nemá přípustné řešení.
- (c) Úloha P nemá přípustné řešení a D je neomezená.
- (d) Úlohy P i D mají přípustné řešení. Pak mají i optimální řešení \mathbf{x}^* a \mathbf{y}^* a platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}^*$.

Duální lineární programy můžeme uvážit i pro lineární programy v obecném tvaru, stačí postupovat podle následující tabulky. Postup funguje zleva doprava i zprava doleva.

	Primární úloha	Duální úloha
Proměnné	$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$	$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$
Matice	$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$	$A^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$
Pravá strana	$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$	$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$
Účelová funkce	$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
Podmínky	i -tá podmínka má \leq	$y_i \geq 0$
	\geq	$y_i \leq 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	j -tá podmínka má \geq
	$x_j \leq 0$	\leq
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

Příklad 1. Vytvořte duální program D pro následující primární lineární program P :

$$\begin{aligned} \max & 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ & 5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Příklad 2. Vytvořte duální program D pro následující primární lineární program P :

$$\begin{aligned} \max & x_1 - 2x_2 + 3x_4 \\ & x_2 - 6x_3 + x_4 \leq 4 \\ & -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ & 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 \geq 5 \\ & x_2 \leq 0 \\ & x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Příklad 3. Dokažte nebo vyvráťte tvrzení:

- (a) Pro každý lineární program P platí, že duál duálu P je původní program P .
- (b) Pokud má lineární program optimum s celočíselnými proměnnými, tak má celočíselné optimální řešení i duál.

Příklad 4. (*) Mějme následující úlohu lineárního programování P :

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Pomocí duality zkonstruujte soustavu nerovnic, pro kterou ze souřadnic libovolného řešení lze vyčíst optimální řešení pro P .

Tím ukážeme, že asymptotická složitost problému rozhodnout, zda je daný mnohostěn neprázdný, je stejná jako složitost problému nalezení optimálního řešení úlohy lineárního programování. Nebo ještě jinak: nalezení přípustného řešení lineárního programu je asymptoticky stejně obtížné jako nalezení optimálního řešení.