

# Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 6. cvičení\*

21. března 2023

## 1 Simplexová metoda

Úloha lineárního programování v rovnicovém tvaru je zapsaná jako  $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$  za podmínek  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  a  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ , kde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Předpokládejme, že  $\text{rank}(A) = m$ .

Báze je množinou  $B \subseteq \{1, \dots, n\}$  indexů proměnných takovou, že  $A_B$  je regulární, kde  $A_B$  značí podmatici  $A$  indexovanou sloupci z  $B$ . Bázickým řešením  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  odpovídající bázi  $B$  je řešení soustavy  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , pro které platí  $x_i = 0$  pro každé  $i \notin B$ . Přípustná báze je taková, že jí odpovídající bázické řešení  $\mathbf{x}$  je přípustné, tedy  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ .

**Vzorový řešený příklad:**

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Upravíme na rovnicový tvar zavedením nových proměnných  $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 + s_1 &= 1 \\ x_1 + s_2 &= 3 \\ x_2 + s_3 &= 2 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Začneme v nějakém přípustném bázickém řešení. Zde lze zvolit původní proměnné  $x_1 = x_2 = 0$  a  $(s_1, s_2, s_3) = \mathbf{b}^\top = (1, 3, 2)$ . Pak přepíšeme soustavu tak, aby bázické proměnné  $s_1, s_2, s_3$  byly na levé straně:

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + x_2 \\ s_1 &= 1 + x_1 - x_2 \\ s_2 &= 3 - x_1 \\ s_3 &= 2 - x_2 \end{aligned}$$

Vstoupíme  $x_1$  do báze, protože má nejvyšší kladný koeficient v účelové funkci, a vystoupíme  $s_2$ :

$$\begin{aligned} \max 6 + x_2 - 2s_2 \\ s_1 &= 4 - x_2 - s_2 \\ x_1 &= 3 - s_2 \\ s_3 &= 2 - x_2 \end{aligned}$$

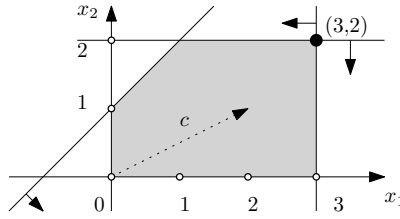
Vstoupíme  $x_2$  do báze, protože má nejvyšší kladný koeficient v účelové funkci, a vystoupíme  $s_3$ :

$$\begin{aligned} \max 8 - 2s_2 - s_3 \\ s_1 &= 2 - s_2 + s_3 \\ x_1 &= 3 - s_2 \\ x_2 &= 2 - s_3 \end{aligned}$$

Není, co zlepšovat, takže máme optimum pro  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 2$ ,  $s_1 = 2$  a  $s_2 = s_3 = 0$  s hodnotou účelové funkce 8.

---

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>



Obrázek 1: Uvedené řešení odpovídá posunu z počátku do vrcholu  $(3,0)$  a poté do  $(3,2)$ .

### Pseudokód simplexové metody:

1. *Vstup:* Úloha lineárního programování  $P$  v rovnicovém tvaru,  $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$  za podmínek  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  a  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ , kde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Předpokládáme, že  $\text{rank}(A) = m$ .
2. *Nalezni počáteční bázecké přípustné řešení:* Přenásob soustavu, aby  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ , a vyřeš simplexovou metodu pomocnou úlohu  $\max -x_{n+1} - \dots - x_{n+m}$  za  $\overline{A}\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$ , kde  $\overline{A} = (A \mid I_m) \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$  a  $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{n+m})$ . Tato úloha má snadné počáteční řešení  $(0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)$ . Pokud je optimální hodnota záporná, pak **skončí**, protože neexistuje přípustné řešení pro  $P$ . Jinak je optimum  $(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$  a pak je  $(x_1, \dots, x_n)$  počátečním řešením pro  $P$ .
3. *Spočítej simplexovou tabulku:* Pro přípustnou bázi  $B \subseteq \{1, \dots, n\}$  přepiš  $P$  na  $\max z$  pro

$$z = z_0 + \mathbf{r}^\top \mathbf{x}_N \text{ za podmínek}$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{p} + Q\mathbf{x}_N,$$

kde  $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$ ,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ ,  $z_0 \in \mathbb{R}$  a  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{n-m}$ .

4. *Vrať případně optimum:* Pokud  $\mathbf{r} \leq \mathbf{0}$ , tak **skončí** a vrať optimum s bázeckými proměnnými  $\mathbf{x}_B = \mathbf{p}$  a nebázeckými proměnnými  $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ .
5. *Vyber proměnnou vstupující do báze:* Podle zvoleného pivotovacího pravidla vyber vstupující proměnnou  $x_t$  z proměnných  $x_j$  s  $j \in N$  a  $r_j > 0$ . Protože není  $\mathbf{r} \leq \mathbf{0}$ , tak vstupující proměnná  $x_t$  vždy existuje. Volbou  $x_t$  chceme zvýšit hodnotu účelové funkce.
6. *Vyber proměnnou vystupující z báze:* Uvaž řádky  $i$  simplexové tabulky, ve kterých se  $x_t$  objevuje, a vyber z nich vystupující proměnnou  $x_s$  tak, aby  $\frac{-p_s}{Q_{s,t}} = \min_{i \in B: Q_{i,t} < 0} \frac{-p_i}{Q_{i,t}}$ . Speciálně tedy musí platit  $Q_{s,t} < 0$ . Tato volba  $x_s$  zajišťuje, že nové bázecké řešení je přípustné.  
Pokud vystupující proměnná neexistuje ( $t$ -tý sloupec  $Q$  je nezáporný), pak **skončí**, protože úloha  $P$  je neomezená. Je-li na výběr více vystupujících proměnných, tak vyber podle pivotovacího pravidla, či libovolně, pokud pravidlo ani tak vystupující proměnnou nespecifikuje.
7. *Aktualizuj simplexovou tabulku a iteruj:* Zvol  $(B \setminus \{s\}) \cup \{t\}$  jako novou bázi a přepiš simplexovou tabulku tak, aby odpovídala této nové bázi. Pokračuj krokem 4.

V kroce 5 se může stát, že nově vybraná vstupující proměnná nevylepší hodnotu účelové funkce a pak říkáme, že řešení je *degenerované*. To například nastává, pokud je v předešlém kroce na výběr více vystupujících proměnných. U degenerovaných řešení může dojít k *zacyklení* simplexové metody, kdy se nevylepší hodnota účelové funkce a algoritmus se nikdy nezastaví. Zacyklení se dá zabránit volbou vhodného pivotovacího pravidla.

### Příklady pivotovacích pravidel pro výběr vstupující proměnné $x_t$ a vystupující $x_s$ :

1. *Dantzigovo pravidlo:* Vyber  $t \in N$  s maximálním  $r_t$  a zvol  $x_s$  libovolně z možných proměnných.
2. *Blandovo pravidlo:* Vyber nejmenší možné  $t \in N$  a pro něj nejmenší možné  $s \in B$ . Brání zacyklení, ale je pomalé.

Existuje spousta dalších pivotovacích pravidel (lexikografické, náhodné a další).

**Příklad 1.** *Převeďte následující soustavu nerovnic do rovnicového tvaru:*

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 3 \\x_2 + x_3 &\leq 12 \\x_1 + 3x_2 - x_4 &\geq -7 \\x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{R} \\x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

*Nalezněte také nějaké bázecké přípustné řešení pro zadaný rovnicový tvar.*

*Mějme libovolný lineární program s  $m$  lineárními nerovnicemi či rovnicemi a  $n$  proměnnými. Kolik proměnných nám vždy stačí v rovnicovém tvaru této úlohy?*

**Příklad 2.** *Vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu lineárního programování:*

$$\begin{aligned}\max 3x_1 + 4x_2 \\x_1 + x_2 &\leq 4 \\2x_1 + x_2 &\leq 5 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

**Příklad 3.** *Vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu lineárního programování:*

$$\begin{aligned}\max 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\2x_1 + x_2 &\leq 10 \\x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leq 20 \\x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$