

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 6. cvičení*

21. března 2023

1 Simplexová metoda

Úloha lineárního programování v rovnicovém tvaru je zapsaná jako $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ za podmínek $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Předpokládejme, že $\text{rank}(A) = m$.

Báze je množinou $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ indexů proměnných takovou, že A_B je regulární, kde A_B značí podmatici A indexovanou sloupci z B . Bázickým řešením $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ odpovídající bázi B je řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pro které platí $x_i = 0$ pro každé $i \notin B$. Přípustná báze je taková, že jí odpovídající bázické řešení \mathbf{x} je přípustné, tedy $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Vzorový řešený příklad:

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Upravíme na rovnicový tvar zavedením nových proměnných $s_1, s_2, s_3 \geq 0$:

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 + s_1 &= 1 \\ x_1 + s_2 &= 3 \\ x_2 + s_3 &= 2 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Začneme v nějakém přípustném bázickém řešení. Zde lze zvolit původní proměnné $x_1 = x_2 = 0$ a $(s_1, s_2, s_3) = \mathbf{b}^\top = (1, 3, 2)$. Pak přepíšeme soustavu tak, aby bázické proměnné s_1, s_2, s_3 byly na levé straně:

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + x_2 \\ s_1 &= 1 + x_1 - x_2 \\ s_2 &= 3 - x_1 \\ s_3 &= 2 - x_2 \end{aligned}$$

Vstoupíme x_1 do báze, protože má nejvyšší kladný koeficient v účelové funkci, a vystoupíme s_2 :

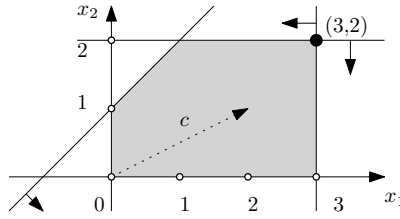
$$\begin{aligned} \max 6 + x_2 - 2s_2 \\ s_1 &= 4 - x_2 - s_2 \\ x_1 &= 3 - s_2 \\ s_3 &= 2 - x_2 \end{aligned}$$

Vstoupíme x_2 do báze, protože má nejvyšší kladný koeficient v účelové funkci, a vystoupíme s_3 :

$$\begin{aligned} \max 8 - 2s_2 - s_3 \\ s_1 &= 2 - s_2 + s_3 \\ x_1 &= 3 - s_2 \\ x_2 &= 2 - s_3 \end{aligned}$$

Není, co zlepšovat, takže máme optimum pro $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $s_1 = 2$ a $s_2 = s_3 = 0$ s hodnotou účelové funkce 8.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>



Obrázek 1: Uvedené řešení odpovídá posunu z počátku do vrcholu $(3,0)$ a poté do $(3,2)$.

Pseudokód simplexové metody:

1. *Vstup:* Úloha lineárního programování P v rovnicovém tvaru, $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Předpokládáme, že $\text{rank}(A) = m$.
2. *Nalezni počáteční bázecké přípustné řešení:* Přenásob soustavu, aby $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, a vyřeš simplexovou metodu pomocnou úlohu $\max -x_{n+1} - \dots - x_{n+m}$ za $\overline{A}\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$, $\overline{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, kde $\overline{A} = (A \mid I_m) \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$ a $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{n+m})$. Tato úloha má snadné počáteční řešení $(0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)$. Pokud je optimální hodnota záporná, pak **skončí**, protože neexistuje přípustné řešení pro P . Jinak je optimum $(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ a pak je (x_1, \dots, x_n) počátečním řešením pro P .
3. *Spočítej simplexovou tabulku:* Pro přípustnou bázi $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ přepiš P na $\max z$ pro

$$z = z_0 + \mathbf{r}^\top \mathbf{x}_N \text{ za podmínek}$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{p} + Q\mathbf{x}_N,$$

kde $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $z_0 \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{n-m}$.

4. *Vrať případně optimum:* Pokud $\mathbf{r} \leq \mathbf{0}$, tak **skončí** a vrať optimum s bázeckými proměnnými $\mathbf{x}_B = \mathbf{p}$ a nebázeckými proměnnými $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$.
5. *Vyber proměnnou vstupující do báze:* Podle zvoleného pivotovacího pravidla vyber vstupující proměnnou x_t z proměnných x_j s $j \in N$ a $r_j > 0$. Protože není $\mathbf{r} \leq \mathbf{0}$, tak vstupující proměnná x_t vždy existuje. Volbou x_t chceme zvýšit hodnotu účelové funkce.
6. *Vyber proměnnou vystupující z báze:* Uvaž řádky i simplexové tabulky, ve kterých se x_t objevuje, a vyber z nich vystupující proměnnou x_s tak, aby $\frac{-p_s}{Q_{s,t}} = \min_{i \in B: Q_{i,t} < 0} \frac{-p_i}{Q_{i,t}}$. Speciálně tedy musí platit $Q_{s,t} < 0$. Tato volba x_s zajišťuje, že nové bázecké řešení je přípustné.
Pokud vystupující proměnná neexistuje (t -tý sloupec Q je nezáporný), pak **skončí**, protože úloha P je neomezená. Je-li na výběr více vystupujících proměnných, tak vyber podle pivotovacího pravidla, či libovolně, pokud pravidlo ani tak vystupující proměnnou nespecifikuje.
7. *Aktualizuj simplexovou tabulku a iteruj:* Zvol $(B \setminus \{s\}) \cup \{t\}$ jako novou bázi a přepiš simplexovou tabulku tak, aby odpovídala této nové bázi. Pokračuj krokem 4.

V kroce 5 se může stát, že nově vybraná vstupující proměnná nevylepší hodnotu účelové funkce a pak říkáme, že řešení je *degenerované*. To například nastává, pokud je v předešlém kroce na výběr více vystupujících proměnných. U degenerovaných řešení může dojít k *zacyklení* simplexové metody, kdy se nevylepší hodnota účelové funkce a algoritmus se nikdy nezastaví. Zacyklení se dá zabránit volbou vhodného pivotovacího pravidla.

Příklady pivotovacích pravidel pro výběr vstupující proměnné x_t a vystupující x_s :

1. *Dantzigovo pravidlo:* Vyber $t \in N$ s maximálním r_t a zvol x_s libovolně z možných proměnných.
2. *Blandovo pravidlo:* Vyber nejmenší možné $t \in N$ a pro něj nejmenší možné $s \in B$. Brání zacyklení, ale je pomalé.

Existuje spousta dalších pivotovacích pravidel (lexikografické, náhodné a další).

Příklad 1. *Převěďte následující soustavu nerovnic do rovnicového tvaru:*

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 3 \\x_2 + x_3 &\leq 12 \\x_1 + 3x_2 - x_4 &\geq -7 \\x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{R} \\x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

Nalezněte také nějaké bázecké přípustné řešení pro zadaný rovnicový tvar.

Mějme libovolný lineární program s m lineárními nerovnicemi či rovnicemi a n proměnnými. Kolik proměnných nám vždy stačí v rovnicovém tvaru této úlohy?

Příklad 2. *Vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu lineárního programování:*

$$\begin{aligned}\max 3x_1 + 4x_2 \\x_1 + x_2 &\leq 4 \\2x_1 + x_2 &\leq 5 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Příklad 3. *Vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu lineárního programování:*

$$\begin{aligned}\max 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\2x_1 + x_2 &\leq 10 \\x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leq 20 \\x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

Příklad 4. *Mějme zadanou následující úlohu lineárního programování*

$$\begin{aligned}\max x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\x_1 - x_5 + x_6 &= 20 \\x_1 + x_3 + x_7 &= 30 \\x_1 + x_2 + x_4 + x_8 &= 10 \\x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_9 &= 1 \\x_1, x_2, \dots, x_9 &\geq 0\end{aligned}$$

a počáteční bázecké řešení $(0, 0, 0, 0, 0, 20, 30, 10, 1)$. Proved'te jeden krok simplexové metody, který maximalizuje přírůstek v účelové funkci.