Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 4. cvičení*

7. března 2023

1 Základní pojmy z geometrie

1.1 Afinita

Afinní prostor $A \subseteq \mathbb{R}^d$ má tvar $L + \mathbf{v}$ pro nějaký lineární prostor L a vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$. Afinní prostor jde určit pomocí soustavy rovnic $Mx = \mathbf{b}$. *Dimenze* afinního prostoru A je rovna dimenzi jeho přidruženého lineárního prostoru L. *Afinní kombinací* vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^d$ je vektor $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Množina $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afinně nezávislá*, pokud platí, že žádný vektor $\mathbf{v} \in V$ není afinní kombinací ostatních vektorů z V. *Afinní obal* $\mathrm{af}(V)$ množiny vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je množina všech afinních kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V.

Příklad 1. *Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je afinní prostor. Z definice je pak A tvaru $A = L + \mathbf{v}$ pro nějaký lineární prostor L a nějaký vektor $\mathbf{v}$. Dokažte, že pro dané $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ existuje nanejvýš jeden lineární prostor $L \subseteq \mathbb{R}^d$ takový, že $A = L + \mathbf{v}$.*

(*) Charakterizujte všechny vektory $\mathbf{v}$, které posunou lineární prostor L na afinní prostor A.

1.2 Nadroviny

Nadrovina je libovolný afinní prostor v $\mathbb{R}^d$ dimenze $d-1$. V rovině nadroviny odpovídají přímkám a v $\mathbb{R}^3$ zase rovinám. Nadrovinu lze zapsat jako $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = h\}$ pro $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ a $h \in \mathbb{R}$. Nadrovina rozděluje prostor $\mathbb{R}^d$ na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

Příklad 2. *(a) Mohou se v $\mathbb{R}^4$ dvě roviny protínat v jednom bodě? Jak mohou vypadat průniky dvou rovin v $\mathbb{R}^4$?*

(b) Mohou se v $\mathbb{R}^5$ dva afinní prostory dimenze 3 protínat v jednom bodě?

1.3 Konvexita

Množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ je *konvexní*, pokud pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ a $t \in [0,1]$ platí $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in K$. Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v K je celá v K. Vektor $\mathbf{x}$ je *konvexní kombinací* vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, pokud $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0,1]$ splňují $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Množina $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je v *konvexní poloze* (neboli *konvexně nezávislá*), pokud platí, že žádný vektor $v \in V$ není konvexní kombinací ostatních vektorů z V. *Konvexní obal* $\mathrm{conv}(V)$ množiny vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je množina konvexních kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V.

Příklad 3. *Víme, že v $\mathbb{R}^d$ je maximálně d lineárně nezávislých vektorů a maximálně $d+1$ afinně nezávislých vektorů. Kolik nejvýše je v $\mathbb{R}^d$ konvexně nezávislých vektorů?*

1.4 Mnohostěny

Konvexní mnohostěn je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně je konvexním mnohostěnem libovolná množina bodů tvaru $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : A\mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$ pro nějakou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Nechť P je konvexní mnohostěn a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$. Jestliže pro každé $\mathbf{x} \in P$ platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \le t$ a zároveň existuje $\mathbf{x} \in P : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t$, pak množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t\}$ tvoří *tečnou nadrovinu* H mnohostěnu P. Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem P pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P. K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* $\emptyset$ a P. Stěny dimenzí 0, 1 a $d-1$ nazýváme *vrcholy*, *hrany* a *fasety*. Konvexní mnohostěn je *omezený*, pokud je obsažený v kouli s konečně velkým poloměrem.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Příklad 4. *Jaký je počet stěn krychle a osmistěnu v* $\mathbb{R}^3$*?*

Příklad 5. *Mějme mnohostěn* $P = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq 1 \ \&\ x \leq 2\}$*. Převeďte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).*

Příklad 6. *Nechť* P *je konvexní mnohostěn v* $\mathbb{R}^d$ *a nechť* F *a* G *jsou jeho stěny. Dokažte, že* $F \cap G$ *je stěnou* P*.*

Přesněji $F = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\colon \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \alpha\}$ *a* $G = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\colon \mathbf{b}^\top \mathbf{x} = \beta\}$*, kde platí* $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq \alpha$ *a* $\mathbf{b}^\top \mathbf{x} \leq \beta$ *pro každé* $\mathbf{x} \in P$*. Uveďte formuli, která stěnu* $F \cap G$ *určuje.*