Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 14. cvičení*

16. května 2023

1 Matroidy

Pro množinu S a systém $\mathcal{I} \subseteq 2^S$ nazveme pár $(S,\mathcal{I})$ *systémem nezávislostí*, pokud platí

(A1) $\emptyset \in \mathcal{I}$,

(A2) pokud $X \subseteq Y \in \mathcal{I}$, pak $X \in \mathcal{I}$ (uzavřenost na podmnožiny).

Množiny $X \in \mathcal{I}$ se nazývají *nezávislé* a nezávislá množina, která je maximální vzhledem k inkluzi, se nazývá *báze*. Pro $A \subseteq S$ je *bází* A nezávislá množina $X \subseteq A$, která je maximální vzhledem k inkluzi. Jako *rank* $r(A)$ množiny $A \subseteq S$ označíme velikost největší nezávislé množiny obsažené v A, neboli $r(A) = \max\{|Y| \colon Y \in \mathcal{I}, Y \subseteq A\}$.

Mějme systém nezávislostí $(S,\mathcal{I})$ a funkci $c\colon S \to \mathbb{R}$. Spousta problémů v kombinatorické optimalizaci je speciálním případem následujícího problému.

Problém pro systém nezávislostí: Najdi $X \in \mathcal{I}$ maximalizující $c(X) = \sum_{e\in X} c(e)$.

$$
\begin{aligned}
\text{Proměnné:} \quad & x_e \geq 0 \text{ pro každé } e \in S\\
\text{Účelová funkce:} \quad & \max \sum_{e\in S} c(e)x_e\\
\text{Podmínky :} \quad & x(A) = \sum_{e\in A} x_e \leq r(A) \text{ pro každé } A \subseteq S
\end{aligned}
$$

Pokud systém nezávislostí $(S,\mathcal{I})$ splňuje následující podmínku, pak je *matroidem*:

(A3) pokud $X, Y \in \mathcal{I}$ a $|X| > |Y|$, pak existuje $e \in X \setminus Y$ takové, že $Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ (výměnná vlastnost).

Matroidy zobecňují koncept nezávislosti, jehož konkrétním příkladem je například lineární nezávislost ve vektorových prostorech. Matroidy jsou pro nás zajímavé, protože následující jednoduchý hladový algoritmus nad nimi dovede řešit optimalizační problémy jako například Problém pro systém nezávislostí.

Algorithm 1.1: GREEDY$(S,\mathcal{I},c)$

Input : Matroid $(S,\mathcal{I})$ a funkce $c\colon S \to \mathbb{R}$.
Output : $X \in \mathcal{I}$ maximalizující $c(X)$.
$A \leftarrow \emptyset$,
if existuje $e \in S$ takové, že $A \in \{e\} \in \mathcal{I}$ a $c(e) > 0$
do $\begin{cases} \text{najdi takové } e \text{ s maximálním } c(e), \\ A \leftarrow A \cup \{e\}. \end{cases}$
Output $X = A$.

Hladový algoritmus najde optimální řešení LP formulace Problému pro systém nezávislostí daného matroidu. Navíc analýza tohoto algoritmu ukazuje, že *polyotop matroidu* $(S,\mathcal{I})$ daný podmínkami $x_e \geq 0$ pro $e \in S$ a $x(A) \leq r(A)$ pro $A \subseteq S$ je celočíslený.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Příklad 1. *Vhodnou volbou S, $\mathcal{I}$ a c ukažte, že následující problémy jsou speciálními případy Problému pro systém nezávislostí. Ve kterých případech je pak $(S, \mathcal{I})$ matroidem?*

(a) TSP*: v grafu $G = (V, E)$ váženém funkcí $f \colon E \to \mathbb{R}^+$ najděte hamiltonovskou kružnici minimální váhy.*

(b) Maximální párování*: v grafu $G = (V, E)$ najděte maximální párování.*

(c) Les maximální váhy*: v grafu $G = (V, E)$ váženém funkcí $f \colon E \to \mathbb{R}$ najděte les maximální váhy.*

(d) Problém batohu*: pro čísla $w_1, \ldots, w_n, c_1, \ldots, c_n$ a W najděte množinu $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ maximalizující $\sum_{i \in S} c_i$ a splňující $\sum_{i \in S} w_i \leq W$.*

(e) Minimální kostra*: v grafu $G = (V, E)$ váženém funkcí $f \colon E \to \mathbb{R}$ najděte kostru minimální váhy.*

(f) Lineárně nezávislé sloupce*: z matice $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ nad tělesem $\mathbb{T}$ chceme vybrat co nejvíc lineárně nezávislých sloupců.*

Příklad 2. *Dokažte, ze axiom (A3) je ekvivaletní s následujícím tvrzením: pro každé $A \subseteq S$ mají všechny báze množiny A stejnou velikost.*

Příklad 3. *Buď $G = (V, E)$ graf. Uvažte systém nezávislostí $(E, \mathcal{I})$, kde $\mathcal{I}$ obsahuje párování v grafu G. Dokažte, že hladový algoritmus na tomto systému najde řešení aspoň poloviční velikosti optima.*

Příklad 4. *Mějme systém nezávislostí $(S, \mathcal{I})$. O každé množině z $2^S \setminus \mathcal{I}$ řekneme, že je* závislá. *Minimální závislé množiny vzhledem k inkluzi nazveme* kružnice.

(a) *Pro kružnici C dokažte, že $M_C = (S, \mathcal{F}_C = \{F \subseteq S \colon C \setminus F \neq \emptyset\})$ je matroidem.*

(b) *Dokažte, že každý systém nezávislostí je průnikem konečně mnoha matroidů.*