

# Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 10. cvičení\*

18. dubna 2023

## 1 Dualita její aplikace

Mějme následující úlohu lineárního programování  $P$  s  $n$  proměnnými a  $m$  podmínkami:

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (\text{P})$$

Té budeme říkat *primární lineární program* (neboli *primár*). Jeho *duálním lineárním programem* (neboli *duálem*) nazveme následující lineární program  $D$  s  $m$  proměnnými a  $n$  podmínkami:

$$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \text{ za podmínek } A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \text{ a } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \quad (\text{D})$$

Vysvětlení: při řešení  $P$  se snažíme najít lineární kombinaci  $m$  podmínek soustavy  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$  s nějakými koeficienty  $y_1, \dots, y_m \geq 0$  takovými, aby výsledná nerovnost měla  $j$ -tý koeficient aspoň  $c_j$  pro každé  $j \in \{1, \dots, n\}$  a pravá strana přitom byla co nejmenší.

Ukazuje se, že program  $D$  „hlídá“ program  $P$  podle následujícího výsledku, ze kterého například vidíme, že je-li  $P$  neomezený, pak  $D$  nemá přípustné řešení.

**Věta 1** (Slabá věta o dualitě). *Pro každé přípustné řešení  $\mathbf{x}$  úlohy  $P$  a každé přípustné řešení  $\mathbf{y}$  úlohy  $D$  platí  $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$ .*

Následující zesílení je asi nejdůležitějším teoretickým výsledkem o lineárních programech.

**Věta 2** (Silná věta o dualitě). *Pro úlohy  $P$  a  $D$  nastane právě jedna z následujících čtyř možností:*

- (a) Ani  $P$  ani  $D$  nemá přípustné řešení.
- (b) Úloha  $P$  je neomezená a  $D$  nemá přípustné řešení.
- (c) Úloha  $P$  nemá přípustné řešení a  $D$  je neomezená.
- (d) Úlohy  $P$  i  $D$  mají přípustné řešení. Pak mají i optimální řešení  $\mathbf{x}^*$  a  $\mathbf{y}^*$  a platí  $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}^*$ .

Duální lineární programy můžeme uvážit i pro lineární programy v obecném tvaru, stačí postupovat podle následující tabulky. Postup funguje zleva doprava i zprava doleva.

	Primární úloha	Duální úloha
Proměnné	$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$	$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$
Matice	$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$	$A^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$
Pravá strana	$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$	$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$
Účelová funkce	$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
Podmínky	$i$ -tá podmínka má $\leq$	$y_i \geq 0$
	$\geq$	$y_i \leq 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	$j$ -tá podmínka má $\geq$
	$x_j \leq 0$	$\leq$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$

---

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

**Příklad 1.** Sestrojte duální úlohu k lineární relaxaci úlohy Nalezení minimálního vrcholového pokrytí ve váženém grafu  $G = (V, E, w)$ , kde  $w: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Pro připomenutí, tato relaxace vypadá následovně:

$$\begin{aligned} \text{Proměnné: } & x_v \geq 0 \text{ pro každé } v \in V \\ \text{Účelová funkce: } & \min \sum_{v \in V} w(v)x_v \\ \text{Podmínky: } & x_u + x_v \geq 1 \text{ pro každé } \{u, v\} \in E \end{aligned}$$

Jaký problém řeší duální úloha pro jednotkové váhy?

Sít je uspořádaná čtveřice  $(G, z, s, c)$ , kde  $G = (V, E)$  je orientovaný graf, neboli  $E \subseteq V \times V$ ,  $z$  a  $s$  jsou dva různé vrcholy grafu  $G$  (zvané zdroj a stok) a kapacita  $c: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  je funkce ohodnocující hrany. Tok v síti je každá funkce  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  splňující  $0 \leq f(e) \leq c(e)$  pro každou hranu  $e \in E$  a

$$\sum_{v: (u,v) \in E} f(u,v) = \sum_{v: (v,u) \in E} f(v,u)$$

pro každý vrchol  $u \in V$  mimo stok a zdroj. Velikost toku je

$$w(f) = \sum_{v: (z,v) \in E} f(z,v) - \sum_{v: (v,z) \in E} f(v,z).$$

Řezem v síti je množina  $R$  hran vedoucích z množiny vrcholů  $Z$  do množiny vrcholů  $S = V \setminus Z$ , kde  $z \in Z$  a  $s \in S$ . Kapacitou řezu  $R$  je  $\sum_{e \in R} c(e)$ .

**Příklad 2.** Uvažme následující úlohu lineárního programování pro problém Nalezení maximálního toku v síti  $(G = (V, E), z, s, c)$ :

$$\begin{aligned} \text{Proměnné: } & x_e \geq 0 \text{ pro každé } e \in E \\ \text{Účelová funkce: } & \max x_{s,z} \\ \text{Podmínky: } & \sum_{u: (u,v) \in E} x_{u,v} - \sum_{u: (v,u) \in E} x_{v,u} = 0 \text{ pro každé } v \in V \\ & x_e \leq c(e) \text{ pro každé } e \in E \end{aligned}$$

(V tomto programu jsme přidali hranu  $(s, z)$  „nekonečně“ velké kapacity, čímž tok cirkuluje a program se tak zjednoduší uvedením podmínek Kirchhoffových zákonů i pro zdroj a stok).

Sestrojte duál této úlohy a (\*) nahlédněte, že odpovídá relaxaci úlohy Nalezení řezu minimální kapacity v síti.

**Příklad 3.** (a) Uvažte následující lineární program pro orientovaný graf  $G = (V, E)$  a jeho vrcholy  $s$  a  $t$ :

$$\begin{aligned} \text{Proměnné: } & x_v \in \mathbb{R} \text{ pro každé } v \in V \\ \text{Účelová funkce: } & \max x_t \\ \text{Podmínky: } & x_s = 0 \\ & x_v - x_u \leq 1 \text{ pro každé } (u, v) \in E \end{aligned}$$

Nahlédněte, že řeší úlohu Nalezení délky nejkratší cesty mezi vrcholy  $s$  a  $t$  v  $G$ . V účelové funkci je skutečně maximum, i když chceme nalézt nejkratší cestu.

(b) Zkonstruuje duál k předešlé úloze. Jaký problém duál řeší?

**Příklad 4.** Sestrojte lineární relaxaci úlohy pro problém Nalezení minimálního množinového pokrytí, ve kterém chceme z množinového systému  $\mathcal{U} \subseteq 2^{\{1, \dots, m\}}$  vybrat  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{U}$  tak, aby  $\{1, \dots, m\} \subseteq \bigcup \mathcal{T}$  a  $|\mathcal{T}|$  bylo minimální. Sestrojte i duální úlohu.