Lineární programování a kombinatorická optimalizace – 4. teoretický domácí úkol*

19. května 2021

Jméno a přezdívka: ....

Řešení můžete odevzdávat do **2. června**, nejpozději ale v 12:20. Jsou povolena i opakovaná odevzdání.

1 Dualita

Příklad 1. *Problém* Minimálního pokrytí grafu klikami *je zadán následovně. Pro daný neorientovaný graf $G = (V, E)$ s n vrcholy chceme vybrat co nejméně klik (úplných podgrafů grafu G) takových, že každý vrchol grafu G bude patřit do nějaké z vybraných klik.*

Dualizujte následující relaxovaný celočíselný program pro tento problém: **[6]**

$$\begin{aligned}
\textit{Proměnné:}\quad & x_{v,k} \geq 0 \text{ a } x_k \geq 0 \text{ pro každé } v \in V \text{ a } k \in \{1, \dots, n\} \\
\textit{Účelová funkce:}\quad & \min \sum_{k=1}^{n} x_k \\
\textit{Podmínky:}\quad & x_{u,k} + x_{v,k} \leq 1 \text{ pro každé } \{u, v\} \notin E \text{ a } k \in \{1, \dots, n\} \\
& \sum_{k=1}^{n} x_{v,k} \geq 1 \text{ pro každé } v \in V \\
& x_k \geq \frac{1}{n} \sum_{v \in V} x_{v,k} \text{ pro každé } k \in \{1, \dots, n\}
\end{aligned}$$

2 Komplementarita

Příklad 2. *Franta uhodl přípustné řešení* $\mathbf{x} = (6, 2, 0)$ *následujícího lineárního programu:* **[6]**

$$\begin{aligned}
\max x_1 + 2x_2 - x_3 & \\
2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 14 \\
4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 28 \\
2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\leq 30 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Rozhodněte za pomoci komplementarity, zda Franta uhodl optimální řešení.

Příklad 3. *Pro zadanou úlohu lineárního programování nalezněte optimální řešení s využitím toho, že optimální řešení* $\mathbf{y}^*$ *duálního programu je* $(2, 1, 0, 0)$*:* **[6]**

$$\begin{aligned}
\min 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 12x_4 & \\
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &\geq 4 \\
2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &\geq 5 \\
3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &\geq 2 \\
x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &\geq 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/