Lineární programování a kombinatorická optimalizace – 3. teoretický domácí úkol*

14. dubna 2021

Jméno a přezdívka: ....

Řešení můžete odevzdávat do **28. dubna**, nejpozději ale ve 12:20. Jsou povolena i opakovaná odevzdání.

1 Simplexová metoda

Příklad 1. *Převeďte následující úlohu lineárního programování do rovnicového tvaru, tedy do tvaru* $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}'$ *za podmínek* $A\mathbf{x}' = \mathbf{b}$, $\mathbf{x}' \geq \mathbf{0}$*:* **[5]**

$$
\begin{aligned}
\min x_1 &+ 2x_5 \\
4x_1 + 5 &\geq 5x_3 + x_4 \\
3x_2 &\leq 12 + x_3 + x_4 \\
x_5 &= 9 - x_3 \\
4 &\geq 2x_1 - x_4 - x_6 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\
x_4, x_5, x_6 &\in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Příklad 2. *Pomocí simplexové metody nalezněte optimální řešení následující úlohy:* **[10]**

$$
\begin{aligned}
\max 4x_1 + x_3 + x_4 \\
8x_1 - 5x_3 - x_4 &= 40 \\
4x_2 - x_3 - x_4 &= 24 \\
x_3 + x_5 &= 8 \\
-2x_3 + x_4 + x_6 &= 8 \\
x_1, \ldots, x_6 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Jako počáteční přípustné bázické řešení zvolte $(x_1, \ldots, x_6) = (5, 6, 0, 0, 8, 8)$ *a používejte Dantzigovo pivotovací pravidlo. Uveďte hodnotu účelové funkce v optimu a také všechny pivotovací kroky s jejich simplexovými tabulkami.*

2 Formulace lineárních programů

Příklad 3. *Navrhněte celočíselný lineární program, který vyřeší následující problém zvaný* Set Splitting*:*

Jsou dány množiny $S_1, \ldots, S_m \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *a každý prvek* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *má váhu* $w_i \geq 0$. *Cílem je nalézt množinu* $X \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *s co nejmenší váhou, která* dělí *každou množinu* S_i, *neboli pro každé* S_i *platí, že* $X \cap S_i \neq \emptyset$ *a* $S_i \setminus X \neq \emptyset$. Váha množiny *je součet vah jejích prvků.* **[3]**

Příklad 4. *Newyorská radnice se pro zastavení epidemie rozhodla postavit novou nemocnici. Za účelem určení vhodné polohy nemocnice vytipovala radnice* n *míst, kde je pravděpodobný výskyt viru. Místa se nacházejí na souřadnicích* (x_i, y_i) *pro* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Navrhněte lineární program, který určí umístění nemocnice minimalizující průměrnou dojezdovou dobu na tato místa. Dojezdová doba je přímo úměrná vzdálenosti bodů v Manhattanské metrice, tedy vzdálenost bodů (x_1, y_1) *a* (x_2, y_2) *je* $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. **[7]**

---

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/