# Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 9. cvičení*

28. dubna 2021

## 1 Dualita

Mějme následující úlohu lineárního programování $P$ s $n$ proměnnými a $m$ podmínkami:

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{P}$$

Té budeme říkat *primární lineární program* (neboli *primár*). Jeho *duálním lineárním programem* (neboli *duálem*) nazveme následující lineární program $D$ s $m$ proměnnými a $n$ podmínkami:

$$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \text{ za podmínek } A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \text{ a } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{D}$$

Vysvětlení: při řešení $P$ se snažíme najít lineární kombinaci $m$ podmínek soustavy $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ s nějakými koeficienty $y_1, \ldots, y_m \geq 0$ takovými, aby výsledná nerovnost měla $j$-tý koeficient aspoň $c_j$ pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ a pravá strana přitom byla co nejmenší.

Ukazuje se, že program $D$ „hlídá“ program $P$ podle následujícího výsledku, ze kterého například vidíme, že je-li $P$ neomezený, pak $D$ nemá přípustné řešení.

**Věta 1** (Slabá věta o dualitě)**.** *Pro každé přípustné řešení $\mathbf{x}$ úlohy $P$ a každé přípustné řešení $\mathbf{y}$ úlohy $D$ platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$.*

Následující zesílení je asi nejdůležitějším teoretickým výsledkem o lineárních programech.

**Věta 2** (Silná věta o dualitě)**.** *Pro úlohy $P$ a $D$ nastane právě jedna z následujících čtyř možností:*

*(a) Ani $P$ ani $D$ nemá přípustné řešení.*

*(b) Úloha $P$ je neomezená a $D$ nemá přípustné řešení.*

*(c) Úloha $P$ nemá přípustné řešení a $D$ je neomezená.*

*(d) Úlohy $P$ i $D$ mají přípustné řešení. Pak mají i optimální řešení $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ a platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}^*$.*

Duální lineární programy můžeme uvážit i pro lineární programy v obecném tvaru, stačí postupovat podle následující tabulky. Postup funguje zleva doprava i zprava doleva.

| | Primární úloha | Duální úloha |
|---|---|---|
| Proměnné | $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ | $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ |
| Matice | $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ | $A^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$ |
| Pravá strana | $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ | $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ |
| Účelová funkce | $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ | $\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$ |
| Podmínky | $i$-tá podmínka má $\leq$ | $y_i \geq 0$ |
| | $\geq$ | $y_i \leq 0$ |
| | $=$ | $y_i \in \mathbb{R}$ |
| | $x_j \geq 0$ | $j$-tá podmínka má $\geq$ |
| | $x_j \leq 0$ | $\leq$ |
| | $x_j \in \mathbb{R}$ | $=$ |

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

**Příklad 1.** *Vytvořte duální program $D$ pro následující primární lineární program $P$:*

$$\begin{aligned} \max 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

**Příklad 2.** *Vytvořte duální program $D$ pro následující primární lineární program $P$:*

$$\begin{aligned} \max x_1 - 2x_2 + 3x_4 & \\ x_2 - 6x_3 + x_4 &\leq 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &\geq 5 \\ x_2 &\leq 0 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

**Příklad 3.** *Dokažte nebo vyvraťte tvrzení:*

*(a) Pro každý lineární program $P$ platí, že duál duálu $P$ je původní program $P$.*

*(b) Pokud má lineární program optimum s celočíselnými proměnnými, tak má celočíselné optimální řešení i duál.*

**Příklad 4.** *(*) Mějme následující úlohu lineárního programování $P$:*

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

*Pomocí duality zkonstruujte soustavu nerovnic, pro kterou ze souřadnic libovolného řešení lze vyčíst optimální řešení pro $P$.*

*Tím ukážeme, že asymptotická složitost problému rozhodnout, zda je daný mnohostěn neprázdný, je stejná jako složitost problému nalezení optimálního řešení úlohy lineárního programování. Nebo ještě jinak: nalezení přípustného řešení lineárního programu je asymptoticky stejně obtížné jako nalezení optimálního řešení.*