# Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 7. cvičení*

21. dubna 2021

## 1 Simplexová metoda o něco podrobněji

Víme, že simplexová metoda se může zacyklit a pak nikdy neskončí. To nastává pouze v degenerovaném případě a je to jediný způsob, jak metoda může selhat. V praxi toto typicky nenastává a možnost zacyklení se často ignoruje. Jinak se zacyklení dá zabránit volbou vhodného pivotovacího pravidla, poslouží například Blandovo pravidlo.

**Příklady pivotovacích pravidel pro výběr vstupující proměnné $x_t$ a vystupující $x_s$:**

1. *Dantzigovo pravidlo:* Vyber $t \in N$ s maximálním $r_t$ a zvol $x_s$ libovolně z možných proměnných.
2. *Blandovo pravidlo:* Vyber nejmenší možné $t \in N$ a pro něj nejmenší možné $s \in B$. Brání zacyklení, ale je pomalé.

Existuje spousta dalších pivotovacích pravidel (lexikografické, náhodné a další).

**Efektivita simplexové metody:** V praxi funguje velmi efektivně, podle počítačových experimentů u úloh v rovnicovém tvaru s $m$ omezeními typicky stačí k nalezení optima $2m$ až $3m$ pivotovacích kroků. Není známé pivotovací pravidlo, pro které by se umělo ukázat, že simplexová metoda skončí v počtu kroků, který je polynomiální vzhledem k počtu omezení $m$ a počtu proměnných $n$. Naopak pro spoustu pivotovacích pravidel existují příklady v rovnicovém tvaru s $O(n)$ omezeními a $O(n)$ proměnnými, pro které s určitou počáteční bází potřebuje simplexová metoda $2^{\Omega(n)}$ pivotovacích kroků. Tyto příklady jsou ovšem vzácné. Existuje pravděpodobnostní pivotovací pravidlo, pro nějž je známo, že simplexová metoda nad každou vstupní úlohou použije nanejvýš $e^{O(\sqrt{n \ln n})}$ pivotovacích kroků.

**Příklad 1.** *Vyřešte simplexovou metodou následující úlohu lineárního programování:*

$$
\begin{aligned}
&\max 5x_1 - 19x_2 - 3x_3 - 4x_4\\
&x_5 = -0.5x_1 + 2x_2 + 0.5x_3 - 4x_4\\
&x_6 = -0.5x_1 + 4x_2 + 1x_3 - x_4\\
&x_7 = 1 - x_1\\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.
\end{aligned}
$$

*Jako pivotovací pravidlo použijte Blandovo pravidlo. Změní se výpočet, pokud bychom používali Dantzigovo pravidlo?*

**Příklad 2.** *Na následující úlohy lineárního programování aplikujte simplexovou metodu. V nějaké chvíli by již nemělo být možné pokračovat. Zkuste důvodnit, proč se algoritmus zastavil.*

*(a) Optimalizujte funkci* $\max 3x_1 + x_2$ *za podmínek*

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 &\leq -1\\
-x_1 - x_2 &\leq -3\\
2x_1 - x_2 &\leq 2\\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

*Po převodu do rovnicového tvaru můžete použít počáteční přípustné bázické řešení s* $x_1 = 3$ *a* $x_2 = 4$.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

*(b) Optimalizujte funkci* $\max 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$ *za podmínek*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 20 \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 &\leq 50 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 30 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$