Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 13. cvičení*

26. května 2021

1 Totální unimodularita

Čtvercová matice A je *unimodulární*, pokud je celočíselná a platí $\det A \in \{-1, 1\}$. Matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je *totálně unimodulární*, pokud každá její čtvercová podmatice má determinant rovný -1, 0 nebo 1.

Totálně unimodulární matice jsou pro nás zajímavé, protože mnohostěn $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge 0\}$ má celočíselné vrcholy pro každé $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ právě tehdy, když je A totálně unimodulární. Na takových mnohostěnech dokážeme pro každé $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ najít v polynomiálním čase celočíselné optimum. Neboli příslušné celočíslené lineární programy dokážeme řešit efektivně.

Několik faktů o unimodulárních a totálně unimodulárních maticích:

(a) Součin a inverze unimodulárních matic jsou unimodulární matice.

(b) Unimodulární matice jsou právě ty celočíslené matice, jejichž inverze je celočíselná.

(c) Unimodulární matice může obsahovat i jiná čísla než 0 a ± 1 (viz matice A dole).

(d) Součin totálně unimodulárních matic nemusí být totálně unimodulární (viz druhá mocnina matice B dole).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) Existuje polynomiální algoritmus na rozpoznávání totální unimodularity.

Příklad 1. *Dokažte, že pokud má matice $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ inverzní matici, která je rovněž celočíselná, pak je A unimodulární.*

Příklad 2. *Mějme matici $A \in \{-1, 0, 1\}^{m\times n}$, ve které každý sloupec obsahuje nanejvýš dva nenulové prvky. Nechť lze řádky matice A rozdělit do dvou množin R_1 a R_2 takových, že jsou-li ve sloupci dva nenulové prvky stejného znaménka, pak oba patří do různých množin R_i a R_j a pokud sloupec obsahuje dva nenulové prvky různých znamének, pak tyto řádky leží ve stejné množině R_i. Dokažte, že taková matice A je totálně unimodulární.*

Nápověda: vzpomeňte si na Laplaceův rozvoj pro počítání determinantu.

Příklad 3. *Dokažte následující dvě tvrzení a zkuste si rozmyslet případné algoritmické důsledky pro známé problémy.*

(a) Maticí incidence orientovaného grafu $G = (V, E)$ *je matice* $A_G \in \{-1, 0, 1\}^{|V|\times|E|}$*, kde* $(A_G)_{v,e} = -1$*, pokud* $e = (v, u)$*,* $(A_G)_{v,e} = 1$*, pokud* $e = (u, v)$*, a* $(A_G)_{v,e} = 0$ *jinak. Dokažte, že* A_G *je totálně unimodulární.*

(b) Maticí incidence neorientovaného grafu $G = (V, E)$ *je matice* $A_G \in \{0, 1\}^{|V|\times|E|}$*, kde* $(A_G)_{v,e} = 1$*, je-li* $v \in e$*, a* $(A_G)_{v,e} = 0$ *jinak. Dokažte, že matice incidence neorientovaného grafu* G *je totálně unimodulární právě tehdy, když je* G *bipartitní.*

Nápověda: v obou částech se může hodit znění předešlého příkladu.

Příklad 4. *Nalezněte celočíselný mnohostěn $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$, kde A je matice s rozměry alespoň 3×3 a A i $\mathbf{b}$ jsou celočíselné, ale A není totálně unimodulární. Může navíc A obsahovat pouze prvky -1, 0 a 1? A co když zakážeme i -1?*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Příklad 5. *Rozhodněte, jestli je zadaná matice totálně unimodulární:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$