# Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 12. cvičení*

19. května 2021

## 1 Komplementarita

**Věta 1** (Věta o komplementaritě)**.** *Mějme úlohu lineárního programování $P$ a její duál $D$ v následující formě:*

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}, A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \tag{P}$$

$$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}, A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{D}$$

*Mějme přípustná řešení $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ pro $P$ a $D$ a označme jako $A_{j,i}$ prvek matice $A$ na pozici $(j,i)$. Pak $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ jsou optimálními řešeními úloh $P$ a $D$ právě tehdy, když platí následující dva vztahy*

$$x_i = 0 \text{ nebo } \sum_{j=1}^{m} A_{j,i} y_j = c_i \text{ pro každé } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ a}$$

$$y_j = 0 \text{ nebo } \sum_{i=1}^{n} A_{j,i} x_i = b_j \text{ pro každé } j \in \{1, \ldots, m\}.$$

První vztah říká, že pro každé $i$ je buď $i$-tá proměnná primáru nulová nebo je $i$-tá podmínka duálu *těsná.* Druhý vztah analogicky říká, že pro každé $j$ je buď $j$-tá proměnná duálu nulová nebo je $j$-tá podmínka primáru těsná. Tento výsledek nám pomůže ověřovat optimalitu řešení či například určovat optima duálu z optim primáru.

**Příklad** (Řešený příklad)**.** *Mějme následující primár $P$ a duál $D$:*

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 & \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &\leq 12 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\leq 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned} \tag{P}$$

*a*

$$\begin{aligned} \min 12y_1 + 7y_2 + 10y_3 & \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 &\geq 2 \\ y_1 - 3y_2 + y_3 &\geq 4 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 &\geq 3 \\ 4y_1 + 3y_2 - y_3 &\geq 1 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{D}$$

*Buď $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{52}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$ optimem v $P$. Určete optimum v $D$.*

*Řešení.* Pode Věty o komplementaritě jsou 2. a 4. nerovnost v $D$ splněny těsně, protože $x_2 \neq 0$ a $x_4 \neq 0$. V primáru $P$ po dosazení hodnot $\mathbf{x}^*$ vidíme, že 2. nerovnost v $P$ není těsná a podle Věty o komplementaritě tedy máme $y_2 = 0$. Dosazením $y_2 = 0$ do 2. a 4. nerovnosti v $D$ zapsaných s rovností dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} y_1 + y_3 &= 4 \\ 4y_1 - y_3 &= 1, \end{aligned}$$

jejíž řešení $\mathbf{y}^* = (1, 0, 3)$ je přípustné pro $D$ a tedy je optimem v $D$. □

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

**Příklad 1.** *Optimálním řešením duální úlohy $D$ k následující úloze $P$ je* $\mathbf{y}^* = \left(0, 7, \frac{11}{2}, 0\right)$.

$$\begin{aligned} \max 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 & \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 12 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\leq -1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{P}$$

*(a) Spočtěte pomocí komplementarity optimální řešení primáru $P$.*

*(b) Nalezněte vektory $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ a $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$, které splňují oba vztahy z Věty o komplementaritě, ale ani $\mathbf{x}$ a ani $\mathbf{y}$ nejsou optimálními řešeními pro $P$ a $D$.*

**Příklad 2.** *Mějme následující zadání duálu $D$ úlohy $P$:*

$$\begin{aligned} \max 3y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 4y_4 & \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 &\leq 5 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + 3y_4 &= 3 \\ y_1 + y_2 + y_3 &\geq 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0 \end{aligned} \tag{D}$$

*Přípustným řešením primáru $P$ je $\mathbf{x}' = (4, 0, -1)$. Je toto řešení primáru optimem v $P$?*

**Příklad 3.** *Na obrázku je bipartitní graf, který má u hran napsané ceny a u vrcholů řešení duálního programu k perfektnímu párování maximální ceny. Dokažte, že toto řešení je optimální.*