Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 10. cvičení*

6. května 2021

1 Dualita její aplikace

Mějme následující úlohu lineárního programování P s n proměnnými a m podmínkami:

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{P}$$

Té budeme říkat *primární lineární program* (neboli *primár*). Jeho *duálním lineárním programem* (neboli *duálem*) nazveme následující lineární program D s m proměnnými a n podmínkami:

$$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \text{ za podmínek } A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \text{ a } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{D}$$

Vysvětlení: při řešení P se snažíme najít lineární kombinaci m podmínek soustavy $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ s nějakými koeficienty $y_1, \dots, y_m \geq 0$ takovými, aby výsledná nerovnost měla j-tý koeficient aspoň c_j pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ a pravá strana přitom byla co nejmenší.

Ukazuje se, že program D „hlídá“ program P podle následujícího výsledku, ze kterého například vidíme, že je-li P neomezený, pak D nemá přípustné řešení.

Věta 1 (Slabá věta o dualitě)**.** *Pro každé přípustné řešení* $\mathbf{x}$ *úlohy* P *a každé přípustné řešení* $\mathbf{y}$ *úlohy* D *platí* $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$.

Následující zesílení je asi nejdůležitějším teoretickým výsledkem o lineárních programech.

Věta 2 (Silná věta o dualitě)**.** *Pro úlohy* P *a* D *nastane právě jedna z následujících čtyř možností:*

(a) Ani P ani D nemá přípustné řešení.

(b) Úloha P je neomezená a D nemá přípustné řešení.

(c) Úloha P nemá přípustné řešení a D je neomezená.

(d) Úlohy P i D mají přípustné řešení. Pak mají i optimální řešení $\mathbf{x}^*$ *a* $\mathbf{y}^*$ *a platí* $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}^*$.

Duální lineární programy můžeme uvážit i pro lineární programy v obecném tvaru, stačí postupovat podle následující tabulky. Postup funguje zleva doprava i zprava doleva.

	Primární úloha	Duální úloha
Proměnné	$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$	$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$
Matice	$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$	$A^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$
Pravá strana	$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$	$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$
Účelová funkce	$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
Podmínky	i-tá podmínka má $\leq$	$y_i \geq 0$
	$\geq$	$y_i \leq 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	j-tá podmínka má $\geq$
	$x_j \leq 0$	$\leq$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Příklad 1. *Sestrojte duální úlohu k lineární relaxaci úlohy* Nalezení minimálního vrcholového pokrytí *ve váženém grafu $G = (V, E, w)$, kde $w\colon V \to \mathbb{R}^+$. Pro připomenutí, tato relaxace vypadá následovně:*

$$\begin{aligned} \textit{Proměnné:} \quad & x_v \geq 0 \textit{ pro každé } v \in V \\ \textit{Účelová funkce:} \quad & \min \sum_{v \in V} w(v) x_v \\ \textit{Podmínky:} \quad & x_u + x_v \geq 1 \textit{ pro každé } \{u, v\} \in E \end{aligned}$$

Jaký problém řeší duální úloha pro jednotkové váhy?

Síť je uspořádaná čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, neboli $E \subseteq V \times V$, z a s jsou dva různé vrcholy grafu G (zvané *zdroj* a *stok*) a *kapacita* $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany. *Tok v síti* je každá funkce $f\colon E \to \mathbb{R}$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každou hranu $e \in E$ a

$$\sum_{v:(u,v) \in E} f(u, v) = \sum_{v:(v,u) \in E} f(v, u)$$

pro každý vrchol $u \in V$ mimo stok a zdroj. *Velikost toku* je

$$w(f) = \sum_{v:(z,v) \in E} f(z, v) - \sum_{v:(v,z) \in E} f(v, z).$$

Řezem v síti je množina R hran vedoucích z množiny vrcholů Z do množiny vrcholů $S = V \setminus S$, kde $z \in Z$ a $s \in S$. *Kapacitou řezu* R je $\sum_{e \in R} c(e)$.

Příklad 2. *Uvažme následující úlohu lineárního programování pro problém* Nalezení maximálního toku *v síti $(G = (V, E), z, s, c)$:*

$$\begin{aligned} \textit{Proměnné:} \quad & x_e \geq 0 \textit{ pro každé } e \in E \\ \textit{Účelová funkce:} \quad & \max x_{s,z} \\ \textit{Podmínky:} \quad & \sum_{u:(u,v) \in E} x_{u,v} - \sum_{u:(v,u) \in E} x_{v,u} = 0 \textit{ pro každé } v \in V \\ & x_e \leq c(e) \textit{ pro každé } e \in E \end{aligned}$$

(V tomto programu jsme přidali hranu (s, z) „nekonečně“ velké kapacity, čímž tok cirkuluje a program se tak zjednoduší uvedením podmínek Kirchhoffových zákonů i pro zdroj a stok).

Sestrojte duál této úlohy a (*) nahlédněte, že odpovídá relaxaci úlohy Nalezení řezu minimální kapacity v síti.

Příklad 3. *(a) Uvažte následující lineární program pro neorientovaný graf $G = (V, E)$ a jeho vrcholy s a t:*

$$\begin{aligned} \textit{Proměnné:} \quad & x_v \geq 0 \textit{ pro každé } v \in V \\ \textit{Účelová funkce:} \quad & \max x_t \\ \textit{Podmínky:} \quad & x_s = 0 \\ & x_u - x_v \leq 1 \textit{ pro každé } \{u, v\} \in E \\ & x_v - x_u \leq 1 \textit{ pro každé } \{u, v\} \in E \end{aligned}$$

Nahlédněte, že řeší úlohu Nalezení délky nejkratší cesty *mezi vrcholy s a t v G. V účelové funkci je skutečně maximum, i když chceme nalézt nejkratší cestu.*

(b) Zkonstruujte duál k předešlé úloze.