

# Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 1. cvičení\*

3. března 2021

## 1 Lineární nerovnice

Spousta praktických úloh i čistě kombinatorických lze naformulovat jako úloha lineárního programování (LP). Na úlohu LP můžeme použít známé metody a efektivně ji vyřešit. Každá úloha lineárního programování se dá převést do jednoho z těchto dvou tvarů.

Úloha LP v kanonickém tvaru je následující optimalizační úloha daná maticí  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a vektory  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  a  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} & \max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ & \text{za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Úloha LP v rovnicovém tvaru je následující optimalizační úloha daná maticí  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a vektory  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  a  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} & \max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & \text{pro } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & \text{za podmínek } A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

**Příklad 1.** Pekárna peče chleby, housky, bagety a koblíhy.

- K upečení jednoho chleba potřebuje půl kila mouky, 10 vajec a 50 g soli.
- Na jednu housku je zapotřebí 150 g mouky, 2 vejce a 10 g soli.
- Na bagetu potřebuje 230 g mouky, 7 vajec a 15 g soli.
- Na jednu koblíhu je třeba 100 g mouky a 1 vejce.

Pekárna má k dispozici 5 kilo mouky, 125 vajec a půl kila soli. Za jeden chleba získá pekárna 20 korun, za housku 2 koruny, za bagetu 10 korun a za koblíhu 7 korun.

Pekárna se snaží vydělat co nejvíce. Jak ale zjistí kolik chlebů, housek, baget a koblíh má upécti? Zformulujte příslušnou úlohu LP.

Grafická metoda na řešení úloh LP: dá se použít máme-li jen dvě proměnné, tedy  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . Potom množina přípustných řešení je konvexní polygon  $P$ , který si můžeme nakreslit a hledat na něm optimum účelové funkce  $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ . Optimum najdeme tak, že uvážíme přímkou  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = 0\}$  kolmou na vektor  $\mathbf{c}$  a procházející počátkem a posouváme ji ve směru vektoru  $\mathbf{c}$ , čímž dostáváme přímky  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = h\}$  s  $h = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$  odpovídající hodnotě účelové funkce. Poslední body z  $P$ , na které narazíme, jsou potom hledanými optimy.

**Příklad 2.** Vyřešte grafickou metodou následující systém nerovnic (neboli následující lineární program):

$$\begin{aligned} -2x + 3y &\leq 3 \\ x + y &\leq 6 \\ -x + y &\geq -4 \\ x + 3y &\leq 12 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Pro účelové funkce:

---

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

(a)  $\max x + y$

(b)  $\max -3x + y$

Co se stane, když odebereme poslední dvě podmínky, tedy  $x \geq 0, y \geq 0$ ?

**Příklad 3.** Ukažte, jak lze:

1. Převést maximalizační úlohu LP na minimalizační a naopak.
2. Převést úlohu LP, která má všechny proměnné  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ , na úlohu LP s proměnnými  $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$  a naopak.
3. Převést úlohu LP s podmínkami ve tvaru nerovností na úlohu LP, jejíž podmínky jsou pouze rovnosti a naopak.

Síť je uspořádaná čtveřice  $(G, z, s, c)$ , kde  $G = (V, E)$  je orientovaný graf, neboli  $E \subseteq V \times V$ ,  $z$  a  $s$  jsou dva různé vrcholy grafu  $G$  (zvané zdroj a stok) a kapacita  $c: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  je funkce ohodnocující hrany. Tok v síti je každá funkce  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  splňující  $0 \leq f(e) \leq c(e)$  pro každou hranu  $e \in E$  a

$$\sum_{v:(u,v) \in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u) \in E} f(v,u)$$

pro každý vrchol  $u \in V$  mimo stok a zdroj. Velikost toku je

$$w(f) = \sum_{v:(z,v) \in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z) \in E} f(v,z).$$

**Příklad 4.** Vytvořte lineární program, který najde maximální tok v síti  $(G = (V, E), z, s, c)$ .

**Příklad 5.** Formulujte Prokládání přímkou jako úlohu LP. Neboli máme-li  $n$  bodů  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  v rovině, tak najděte přímkou  $\{x \in \mathbb{R}: y = ax + b\}$ , která minimalizuje součet vertikálních vzdáleností bodů od výsledné přímky. Vertikální vzdálenost je vzdálenost měřena pouze na ose  $y$ .

Pro jednoduchost předpokládejte, že výsledná přímka není kolmá na osu  $x$ .