JORDANOVA NORMÁLNÍ FORMA

- ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY VEDOU NA REF TVAR
- K ČEMU VEDE RELACE PODOBNOSTI?
  - NA TZV. JORDANOVU NORMÁLNÍ FORMU
- PRO $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ JE **JORDANOVA BUŇKA** $J_k(\lambda)$ JE ČTVERCOVÁ MATICE ŘÁDU k DANÁ PŘEDPISEM

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

- MÁ k-NÁSOBNÉ VLASTNÍ ČÍSLO λ S VLASTNÍM VEKTOREM $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ $(\mathrm{RANK}(J_k(\lambda) - \lambda I_k) = k-1)$

- MATICE $J \in \mathbb{C}^{m \times n}$ JE V **JORDANOVĚ NORMÁLNÍ FORMĚ**, POKUD JE V BLOKOVĚ DIAGONÁLNÍM TVARU

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_m}(\lambda_m) \end{pmatrix},$$

- JE HORNÍ TROJÚHELNÍKOVÁ $\Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_m$ JSOU VLASTNÍ ČÍSLA
- KAŽDÉ BUŇCE ODPOVÍDÁ JEDEN VLASTNÍ VEKTOR

KDE NA DIAGONÁLE JSOU JORDANOVY BUŇKY $J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_m}(\lambda_m)$

- HODNOTY λ_i A k_i NEMUSÍ BÝT NAVZÁJEM RŮZNÉ, JORDANOVY BUŇKY SE MOHOU VYSKYTOVAT VÍCKRÁT
- PŘÍKLADY:

$$\begin{array}{c} \quad J_1(5) \; J_1(5) \; J_3(7) \\ A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \begin{array}{c} \quad J_2(5) \; J_2(7) \; J_1(7) \\ B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

A I B MAJÍ VLASTNÍ ČÍSLA 5, 5, 7, 7, 7

- **VĚTA 9.1** (O JORDANOVĚ NORMÁLNÍ FORMĚ): KAŽDÁ $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ JE PODOBNÁ MATICI V JORDANOVĚ NORMÁLNÍ FORMĚ. TATO MATICE JE AŽ NA POŘADÍ BUNĚK URČENA JEDNOZNAČNĚ.
  - BEZ DŮKAZU
  - POČET BUNĚK $J_k(\lambda)$ JE $\mathrm{RANK}(\tilde{A}^{k-1}) + \mathrm{RANK}(\tilde{A}^{k+1}) - 2\,\mathrm{RANK}(\tilde{A}^{k})$, KDE $\tilde{A} = A - \lambda I_m$

- **VĚTA 9.1** MÁ ZAJÍMAVÉ DŮSLEDKY: (2)
  - POČET JORDANOVÝCH BUNĚK ODPOVÍDAJÍCÍCH λ = POČET VLASTNÍCH VEKTORŮ PRO λ
  - NÁSOBNOST VLASTNÍHO ČÍSLA $\geq$ POČET VLASTNÍCH VEKTORŮ, KTERÉ MU PŘÍSLUŠÍ
- **SYMETRICKÉ MATICE**: MAJÍ PĚKNÉ VLASTNOSTI, ZVLÁŠŤ CO SE TÝČE VLASTNÍCH ČÍSEL
  - UKÁŽEME, ŽE MAJÍ PĚKNÉ VLASTNOSTI A DIAGONALIZOVATELNOSTI
- **HERMITOVSKÁ TRANSPOZICE** MATICE $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ JE MATICE $A^* := \overline{A}^T$
  KOMPLEXNÍ SDRUŽENÍ A TRANSPOZICE
- $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ JE **HERMITOVSKÁ**, POKUD $A = A^*$
  ↳ ZOBECNĚNÍ SYMETRICKÝCH MATIC PRO KOMPLEXNÍ MATICE
- PŘÍKLADY:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 5 \end{pmatrix}$$

SYMETRICKÁ, ALE NE HERMITOVSKÁ — HERMITOVSKÁ, ALE NE SYMETRICKÁ

- PLATÍ: $(A^*)^* = A$, $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$, $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^* A^*$
- $Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$ JE UNITÁRNÍ, POKUD $Q^* Q = I_m$
  ↳ ANALOGIE ORTOGONÁLNÍ MATICE
- NORMA INDUKOVANÁ SKALÁRNÍM SOUČINEM V $\mathbb{C}^m$ JE $\|x\| = \sqrt{x^* x}$
- **VĚTA 9.2** (VLASTNÍ ČÍSLA SYMETRICKÝCH MATIC): VLASTNÍ ČÍSLA KOMPLEXNÍCH HERMITOVSKÝCH MATIC JSOU REÁLNÁ
  ↳ SPECIÁLNĚ TEDY I SYMETRICKÝCH REÁLNÝCH
- DK:
  - BUĎ $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ HERMITOVSKÁ S VLASTNÍM ČÍSLEM λ A S PŘÍSLUŠNÝM VLASTNÍM VEKTOREM x SPLŇUJÍCÍM $\|x\|_2 = \sqrt{x^* x} = 1$
  - MÁME $Ax = \lambda x \Rightarrow x^* A x = \lambda x^* x = \lambda$

$$\Rightarrow \lambda = x^* A x = x^* A^* x = (x^* A x)^* = \lambda^* \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

$A = A^*$ — HERMITOVSKÁ TRANSPOZICE SOUČINU — $\lambda = x^* A x$

$\boxtimes$

- VLASTNÍ VEKTORY A PŘÍSLUŠNÉ RŮZNÝM VL. ČÍSLŮM JSOU ORTOGONÁLNÍ
  - PROTOŽE $\lambda_2 x_1^* x_2 = x_1^* A x_2 = (x_2^* A x_1)^* = (\lambda_1 x_2^* x_1)^* = \lambda_1 x_1^* x_2$
    A $\lambda_1 \neq \lambda_2$ TAK DÁVÁ $x_1^* x_2 = 0$ — $A = A^*$ — $\lambda_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_1^*$
- $\Rightarrow A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ SYMETRICKÁ $\Rightarrow x \in \mathbb{R}^m$ (PŘI ŘEŠENÍ $\det(A - \lambda I_m) = 0$ ZŮSTÁVÁME V $\mathbb{R}^m$)

- REÁLNÉ SYMETRICKÉ MATICE JSOU DIAGONALIZOVATELNÉ
  - DOKONCE SPECIFICKÝM ZPŮSOBEM – Z VLASTNÍCH VEKTORŮ JDE VYTVOŘIT ORTONORMÁLNÍ SYSTÉM (MATICE PODOBNOSTI JE ORTOGONÁLNÍ)

- VĚTA 9.3 (SPEKTRÁLNÍ ROZKLAD SYMETRICKÉ MATICE): PRO KAŽDOU SYMETRICKOU $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ EXISTUJE ORTOGONÁLNÍ $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ($\to Q^T Q = I_m$) A DIAGONÁLNÍ $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$ TAKOVÉ, ŽE $A = Q \Lambda \underbrace{Q^T}_{= Q^{-1}}$.

- DK:
  - INDUKCÍ PODLE m
  - $m = 1$ – TRIVIÁLNÍ, PROTOŽE $\Lambda = A$, $Q = 1$
  - INDUKČNÍ KROK – $m \geq 2$:
  - BUĎ $\lambda \in \mathbb{R}$ VLASTNÍ ČÍSLO A S PŘÍSLUŠNÝM VLASTNÍM VEKTOREM (VÍME → VĚTY 9.2 A POZNÁMCE ZA NÍ) $x \in \mathbb{R}^m$ S $\|x\|_2 = 1$
  - DOPLŇME x NA ORTOGONÁLNÍ MATICI $S = (x | \cdots) \in \mathbb{R}^{m \times m}$
    ↳ LZE, PROTOŽE x JE ORTONORMÁLNÍ SYSTÉM PODLE $\|x\|_2 = 1$ A STAČÍ TAK POUŽÍT DŮSLEDEK 2.2
  - PROTOŽE $(A - \lambda I_m) x = 0$, TAK MÁME $(A - \lambda I_m) S = (0 | \cdots)$ A TEDY $S^T (A - \lambda I_m) S = S^T (0 | \cdots)$. PROTOŽE JE $S^T (A - \lambda I_m) S$ JE SYMETRICKÁ, TAK $S^T (A - \lambda I_m) S = \begin{pmatrix} 0 & 0^T \\ 0 & A' \end{pmatrix}$, KDE $A' \in \mathbb{R}^{(m-1) \times (m-1)}$ JE SYMETRICKÁ ŘÁDU $m - 1$

LZE ROZEPSÁNÍM OVĚŘIT, ŽE PRO SYMETRICKOU A JE $S^T A S$ SYMETRICKÁ

  - PODLE IP $\exists$ ORTOGONÁLNÍ $Q' \in \mathbb{R}^{(m-1) \times (m-1)}$ A DIAGONÁLNÍ $\Lambda' \in \mathbb{R}^{(m-1) \times (m-1)}$ TAKOVÉ, ŽE $A' = Q' \Lambda' (Q')^T$
  - VŠE ROZŠÍŘÍME O JEDEN ŘÁD:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0^T \\ 0 & A' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q' \end{pmatrix}}_{=: R} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0^T \\ 0 & \Lambda' \end{pmatrix}}_{=: \Lambda''} \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & (Q')^T \end{pmatrix}$$

LZE SNADNO OVĚŘIT VYNÁSOBENÍM

$\Rightarrow R$ JE ORTOGONÁLNÍ A Λ'' DIAGONÁLNÍ

$\Rightarrow S^T (A - \lambda I_m) S = R \Lambda'' R^T$

$\Rightarrow A = S R \Lambda'' R^T S^T + \lambda I_m = S R \Lambda'' R^T S^T + \lambda S R R^T S^T =$

$= S R (\Lambda'' + \lambda I_m) R^T S^T$

$\Rightarrow$ MÁME HLEDANÝ ROZKLAD $A = Q \Lambda Q^T$, KDE $Q := SR$ ORTOGONÁLNÍ (ORTOGONALITA SE ZACHOVÁVÁ PŘI SOUČINU)

$\Lambda := \Lambda'' + \lambda I_m$ DIAGONÁLNÍ $\boxtimes$

– PODOBNĚ LZE ROZLOŽIT HERMITOVSKOU $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ NA $A = Q \Lambda Q^*$, KDE Q JE UNITÁRNÍ A Λ DIAGONÁLNÍ

$\Rightarrow$ KAŽDÁ HERMITOVSKÁ MATICE JE DIAGONALIZOVATELNÁ

– PŘÍKLAD ROZKLADU V PREZENTACI

– VÝPOČET VLASTNÍCH ČÍSEL:

– VÝPOČETNĚ SLOŽITÉ JAKO HLEDÁNÍ KOŘENŮ POLYNOMŮ – JEN S URČITOU PŘESNOSTÍ

– POČÍTÁ SE ITERATIVNÍMI NUMERICKÝMI METODAMI

– QR ALGORITMUS, JACOBIHO METODA, LANCZOSOVO METODA, ...

– SOUČASNÉ METODY MAJÍ PRAKTICKY KUBICKOU SLOŽITOST

– UKÁŽEME SI JEDNODUCHOU METODU NA VÝPOČET NEJVĚTŠÍHO VLASTNÍHO ČÍSLA

– ALGORITMUS (MOCNINNÁ METODA):

– VSTUP: MATICE $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$

– VÝSTUP: ODHAD VLASTNÍHO ČÍSLA λ_1, KDE $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ JSOU VLASTNÍ ČÍSLA MATICE A SPLŇUJÍCÍ $|\lambda_1| \geq \ldots \geq |\lambda_m|$

1) ZVOL $0 \neq x_0 \in \mathbb{C}_m$, $i := 1$

2) DOKUD NENÍ SPLNĚNA UKONČUJÍCÍ PODMÍNKA:

3) $\quad y_i := A x_{i-1}$

4) $\quad x_i := \dfrac{y_i}{\|y_i\|_2}$

5) $\quad i := i + 1$

6) VÝSTUP $\lambda_1 := x_{i-1}^T y_i$, $v_1 := x_i$ — ODHAD PŘÍSLUŠNÉHO VLASTNÍHO VEKTORU

ODHAD NEJVĚTŠÍHO VLASTNÍHO ČÍSLA

– VÝHODY: ROBUSTNÍ, SNADNO APLIKOVATELNÁ NA VELKÉ ŘÍDKÉ MATICE

– NEVÝHODY: MŮŽE BÝT POMALÉ, ŠPATNÉ ODHADY KONVERGENCE, ZÁVISÍ NA VOLBĚ x_0

- **VĚTA 9.4** (KONVERGENCE MOCNINNÉ METODY):
  MĚJME $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ S VLASTNÍMI ČÍSLY $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, KDE $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|$, A LIN. NEZ. VLASTNÍMI VEKTORY $v_1, \dots, v_m$, KDE $\|v_1\|_2 = \dots = \|v_m\|_2 = 1$
  MÁ-LI x_0 NENULOVOU SOUŘADNICI VE SMĚRU v_1, PAK x_i KONVERGUJE K NÁSOBKU v_1 A $x_i^T y_i$ KONVERGUJE K λ_1

  $x_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$, KDE $\alpha_1 \neq 0$

  - BEZ DŮKAZU

- MOCNINNÁ METODA SE DÁ VYUŽÍT K VÝPOČTU VŠECH VLASTNÍCH ČÍSEL