- NÁSLEDUJÍCÍ VĚTA MÁ ZAJÍMAVÉ DŮSLEDKY, KTERÉ UMOŽŇUJÍ NAPŘÍKLAD POČÍTAT VELKÉ MOCNINY MATIC
- BUDE SE HODIT ZNÁT PŘÍKLAD POLYNOMIÁLNÍ MATICE A MATICOVÉHO POLYNOMU:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda & 2\lambda-3 \\ 7 & 5\lambda^2-4 \end{pmatrix}}_{\text{POLYNOMIÁLNÍ MATICE}} = \underbrace{\lambda^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}}_{\text{MATICOVÝ POLYNOM}}$$

VĚTA 8.1 (CAYLEYHO-HAMILTONOVA VĚTA):

PRO $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ BUĎ $p_A(\lambda) = (-1)^m\lambda^m + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$.

POTOM $\underbrace{(-1)^m A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_m = 0}_{\text{NEBOLI } p_A(A)=0}$ → NULOVÁ MATICE

- MATICE JE SAMA KOŘENEM SVÉHO CHARAKTERISTICKÉHO POLYNOMU

- DK:
  - PODLE VĚTY 6.3 ADJUNGOVANÁ MATICE SPLŇUJE $(A-\lambda I_m)\,\mathrm{adj}(A-\lambda I_m) = \det(A-\lambda I_m)\cdot I_m$
  - PLATÍ $\mathrm{adj}(A-\lambda I_m) = \lambda^{m-1}B_{m-1} + \dots + \lambda B_1 + B_0$ PRO NĚJAKÉ MATICE $B_{m-1},\dots,B_0 \in \mathbb{C}^{m\times m}$

    PRVKY $\mathrm{adj}(A-I_m)$ JSOU POLYNOMY STUPNĚ $\leq m-1$
  - TEDY $(A-\lambda I_m)\cdot(\lambda^{m-1}B_{m-1} + \dots + \lambda B_1 + B_0) = \det(A-\lambda I_m)\, I_m \overset{!}{=}$

    DEFINICE $p_A(\lambda)$

    $= \left((-1)^m\lambda^m + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0\right) I_m$

  - PO ROZNÁSOBENÍ MÁME

    $-B_{m-1}\lambda^m + (AB_{m-1} - B_{m-2})\lambda^{m-1} + \dots + (AB_1 - B_0)\lambda + AB_0 =$

    $= (-1)^m\lambda^m I_m + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} I_m + \dots + \alpha_1\lambda I_m + \alpha_0 I_m$

    POROVNÁNÍ KOEFICIENTŮ

    $\Rightarrow -B_{m-1} = (-1)^m I_m,\ \underbrace{AB_j - B_{j-1} = \alpha_j I_m}_{\text{PRO } j=1,\dots,m-1},\ AB_0 = \alpha_0 I_m$

  - VYNÁSOBÍME-LI 1. ROVNICI A^m, DALŠÍ A^j A POSLEDNÍ $A^0 = I_m$, PAK SEČTEME, DOSTANEME $0 = -A^mB_{m-1} + (A^mB_{m-1} - A^{m-1}B_{m-2}) + \dots +$

    $+ (A^2B_1 - AB_0) + AB_0 = (-1)^mA^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_m$

    PO SOBĚ JDOUCÍ ČLENY SE VYRUŠÍ → Z PŘEDEŠLÝCH ROVNOSTÍ

$\boxtimes$

- CAYLEYHO HAMILTONOVA VĚTA MÁ NÁSLEDUJÍCÍ DŮSLEDKY

- **DŮSLEDEK 8.2**: PRO $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ JE 1) $A^k \in \operatorname{span}\{I_n, A, \dots, A^{n-1}\}$ PRO KAŽDÉ $k \in \mathbb{N}$
  2) $A^{-1} \in \operatorname{span}\{I_n, A, \dots, A^{n-1}\}$

- DK:
  1) STAČÍ UVÁŽIT $n \geq k$ (JINAK TRIVIÁLNÍ). POTOM $\lambda^k = r(\lambda) p_A(\lambda) + s(\lambda)$, KDE $r(\lambda)$ JE POLYNOM STUPNĚ $k-n$ A $s(\lambda) = b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0$ JE ZBYTEK

  DĚLENÍ POLYNOMU λ^k POLYNOMEM $p_A(\lambda)$ SE ZBYTKEM

  - PAK $A^k = r(A)p_A(A) + s(A) = s(A) = b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_0 \in \operatorname{span}\{I_n, A, \dots, A^{n-1}\}$

  ANALOGICKÁ ÚVAHA PRO MATICOVÝ POLYNOM

  VĚTA 8.1

  A JE REGULÁRNÍ

  2) VÍME, ŽE $p_A(A) = (-1)^n A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = 0$ A $\alpha_0 = \det(A) \neq 0$

  $$\Rightarrow I_n = -\frac{(-1)^n}{\alpha_0}A^n - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0}A^{n-1} - \dots - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}A = A\left(-\frac{(-1)^n}{\alpha_0}A^{n-1} + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_0}I_n\right)$$

  VYTKNUTÍ A

  $$\Rightarrow A^{-1} = \frac{-(-1)^n}{\alpha_0}A^{n-1} + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_0}I_n$$

  PŘENÁSOBENÍ A^{-1}

  $\boxtimes$

- **DIAGONALIZOVATELNOST**

  - PODOBNĚ JAKO U DETERMINANTŮ BY SE HODILO MÍT ÚPRAVY, KTERÉ NEMĚNÍ SPEKTRUM MATICE. ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY TO NEJSOU, ALE BUDE FUNGOVAT TZV. PODOBNOST

  NAPŘÍKLAD VL. ČÍSLA $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ JSOU $0, 0, 0$,

  ALE $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$ MÁ VL. ČÍSLA $0, \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2}$

- MATICE $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ JSOU **PODOBNÉ**, POKUD EXISTUJE REGULÁRNÍ $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ TAKOVÁ, ŽE $A = SBS^{-1}$

  - NEBOLI $AS = SB$

- PŘÍKLAD - MATICE $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ A $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ JSOU SI PODOBNÉ SKRZ $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- RELACE PODOBNOSTI JE RELACÍ EKVIVALENCE
  - PLATÍ REFLEXIVITA, SYMETRIE A TRANZITIVITA

- **VĚTA 8.3** (VLASTNÍ ČÍSLA PODOBNÝCH MATIC): PODOBNÉ MATICE MAJÍ STEJNÁ VLASTNÍ ČÍSLA
- DK:
  - NECHŤ $A, B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ JSOU SI PODOBNÉ
  - Z PODOBNOSTI EXISTUJE REGULÁRNÍ $S \in \mathbb{C}^{m\times m}$ TAKOVÁ, ŽE $A = SBS^{-1}$
  - POTOM $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_m) = \det(SBS^{-1} - \lambda S I_m S^{-1}) =$

$$= \det(S(B-\lambda I_m)S^{-1}) = \det(B - \lambda I_m) = \underline{p_B(\lambda)}$$

MULTIPLIKATIVITA DETERMINANTU A $\det(S)^{-1} = \det(S^{-1})$

$\Rightarrow A, B$ MAJÍ STEJNÁ VLASTNÍ ČÍSLA $\boxtimes$

- VLASTNÍ VEKTORY SE PŘI PODOBNOSTI MĚNIT MOHOU, ALE ZACHOVÁ SE JEJICH POČET (PLATÍ $\dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda I_m)) = \dim(\operatorname{Ker}(B - \lambda I_m))$)

$\Rightarrow$ JE-LI MATICE PODOBNÁ DIAGONÁLNÍ MATICI B, PAK Z B SPOČÍTÁME JEJÍ VLASTNÍ ČÍSLA
↳ ČI DOKONCE JEN TROJÚHELNÍKOVÉ

- MATICE $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ JE **DIAGONALIZOVATELNÁ**, POKUD JE PODOBNÁ DIAGONÁLNÍ MATICI
  - TEDY $A = \underbrace{S\Lambda S^{-1}}$, KDE S JE REGULÁRNÍ A Λ DIAGONÁLNÍ
    = **SPEKTRÁLNÍ ROZKLAD** MATICE A

  - NAPŘÍKLAD $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ NENÍ DIAGONALIZOVATELNÁ
  - KTERÉ MATICE JSOU DIAGONALIZOVATELNÉ?

- **VĚTA 8.4** (CHARAKTERIZACE DIAGONALIZOVATELNÝCH MATIC): $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ JE DIAGONALIZOVATELNÁ $\Leftrightarrow$ A MÁ m LINEÁRNĚ NEZÁVISLÝCH VLASTNÍCH VEKTORŮ

- DK:
  - i) $\Rightarrow$: A JE DIAGONALIZOVATELNÁ $\Rightarrow$ MÁ SPEKTRÁLNÍ ROZKLAD $A = S\Lambda S^{-1}$
    POROVNÁVÁNÍM SLOUPCŮ V $AS = S\Lambda$ DOSTANEME

$$AS_{*j} = (AS)_{*j} = (S\Lambda)_{*j} = S\Lambda_{*j} = S\Lambda_{jj}e_j = \Lambda_{jj}S_{*j}$$

Λ JE DIAGONÁLNÍ

$\Rightarrow \Lambda_{jj}$ JE VLASTNÍ ČÍSLO A A S_{*j} JE PŘÍSLUŠNÝ VLASTNÍ VEKTOR

- SLOUPCE S JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ
  ↳ S JE REGULÁRNÍ

ii) ⇐: NECHŤ $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ JSOU VLASTNÍ ČÍSLA A S VLASTNÍMI VEKTORY $x_1, \dots, x_m$, KTERÉ JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ

– SESTROJME REGULÁRNÍ $S := \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1 & \cdots & x_m \\ | & & | \end{pmatrix}$ A DIAGONÁLNÍ $\Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$

REGULÁRNÍ ↓ $x_1, \dots, x_m$ JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ

– PAK $(AS)_{*j} = A S_{*j} = A x_j = \lambda_j x_j = \Lambda_{jj} x_j = S \Lambda_{*j} = (S\Lambda)_{*j}$

(VOLBA S; x_j JE VL. Č.; VOLBA Λ)

$\Rightarrow AS = S\Lambda \Rightarrow A = S\Lambda S^{-1} \Rightarrow A$ JE DIAGONALIZOVATELNÁ $\boxtimes$

– DŮKAZ JE KONSTRUKTIVNÍ – VLASTNÍ VEKTORY A JSOU SLOUPCE S

– JE-LI $A = S\Lambda S^{-1}$ SPEKTRÁLNÍ ROZKLAD A, PAK $A^T = S^{-T} \Lambda^T S^T$

$\Rightarrow$ VLASTNÍ VEKTORY A^T JSOU SLOUPCE S^{-T}

– UKÁŽEME, ŽE RŮZNÝM VLASTNÍM ČÍSLŮM ODPOVÍDAJÍ LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ VLASTNÍ VEKTORY

– **TVRZENÍ 8.5**:

JSOU-LI $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ RŮZNÁ (NE NUTNĚ VŠECHNA) VLASTNÍ ČÍSLA MATICE $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, PAK PŘÍSLUŠNÉ VLASTNÍ VEKTORY $x_1, \dots, x_k$ JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ.

– <u>DK</u>:

– INDUKCÍ PODLE k

– $k=1$ – TRIVIÁLNÍ (VLASTNÍ VEKTOR x_1 JE NENULOVÝ)

– $k>1$:

– Z $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$ DOSTANEME (PŘENÁSOBENÍM MATICÍ A) $0 = A\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underbrace{A x_i}_{=\lambda_i x_i} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i x_i$

$$\Rightarrow 0 = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i x_i}_{=0} - \lambda_k \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i}_{=0} = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_k)}_{\neq 0,\ \text{PROTOŽE } \lambda_1, \dots, \lambda_k \text{ JSOU RŮZNÁ}} x_i \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$, PROTOŽE $x_1, \dots, x_{k-1}$ JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ Z **IP**

– PROTOŽE $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$, PAK I $\alpha_k = 0 \Rightarrow x_1, \dots, x_k$ JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ $\boxtimes$

- TÍM DOSTÁVÁME DOSTAČUJÍCÍ PODMÍNKU NA DIAGONIZOVATELNOST

- DŮSLEDEK 8.6:

MÁ-LI $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ n NAVZÁJEM RŮZNÝCH VLASTNÍCH ČÍSEL, PAK JE A DIAGONIZOVATELNÁ → PLYNE PŘÍMO Z VĚTY 8.4 A TVRZENÍ 8.5

- SPEKTRÁLNÍ ROZKLAD MOCNINY MATICE:

- MÁ-LI $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ SPEKTRÁLNÍ ROZKLAD $A = S \Lambda S^{-1}$, PAK

$$A^k = S \Lambda^k S^{-1} = S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} S^{-1} \text{ PRO KAŽDÉ } k \in \mathbb{N}$$

↳ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ JSOU VLASTNÍ ČÍSLA MATICE A