VLASTNÍ ČÍSLA: ①

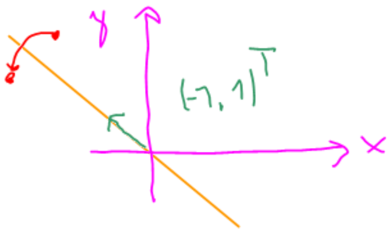
ČÍSLA, KTERÁ O MATICI POSKYTUJÍ MNOHO DŮLEŽITÝCH INFORMACÍ

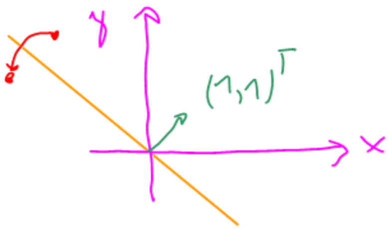
- ČÍSLO $\lambda \in \mathbb{C}$ JE **VLASTNÍM ČÍSLEM** MATICE $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ A $x \in \mathbb{C}^m$ JE JEMU PŘÍSLUŠNÝ **VLASTNÍ VEKTOR**, POKUD $Ax = \lambda x$, $\underbrace{x \neq o}$.

NUTNÉ, JINAK $Ax = \lambda x$ PRO $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

  - VEKTOR x NENÍ URČEN JEDNOZNAČNĚ, KAŽDÝ JEHO NENULOVÝ NÁSOBEK TAKÉ VYHOVUJE (NĚKDY SE x NORMUJE, ABY $\|x\| = 1$)
  - VLASTNÍ ČÍSLA JDE ZAVÉST I OBECNĚJI (PRO T, $f: V \to V$, ...)
- VLASTNÍ VEKTOR JE INVARIANTNÍ SMĚR PŘI ZOBRAZENÍ $x \mapsto Ax$
- VLASTNÍ ČÍSLO JE PAK ŠKÁLOVÁNÍ V TOMTO SMĚRU

- PŘÍKLAD:
  - PŘEKLOPENÍ PODLE PŘÍMKY $y = -x$ MÁ MATICI $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ S VLASTNÍMI VEKTORY $(-1,1)^T$ A $(1,1)^T$
  $\Rightarrow$ VLASTNÍ ČÍSLA 1 A -1





- NÁSLEDUJÍCÍ VÝSLEDEK URČUJE ČÍSLA A VEKTORY, KTERÉ MOHOU BÝT VLASTNÍMI

- **VĚTA 7.1** (CHARAKTERIZACE VLASTNÍCH ČÍSEL A VEKTORŮ):
  PRO $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ JE
  1) $\lambda \in \mathbb{C}$ VLASTNÍM ČÍSLEM MATICE $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_m) = 0$,
  2) $x \in \mathbb{C}^m$ VLASTNÍM VEKTOREM PŘÍSLUŠNÝM K VLASTNÍMU ČÍSLU $\lambda \in \mathbb{C}$
  $\Leftrightarrow o \neq x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_m)$.

- DK:
  1) $\lambda \in \mathbb{C}$ JE VLASTNÍM ČÍSLEM $A \overset{\text{DEFINICE}}{\Leftrightarrow} \underset{x \neq o}{Ax = \lambda x} \overset{\text{ÚPRAVA}}{\Leftrightarrow} \underset{x \neq o}{(A - \lambda I_m)x = o} \Leftrightarrow$
  $\underset{\text{DEFINICE REGULÁRNÍ MATICE}}{\Leftrightarrow} A - \lambda I_m$ JE SINGULÁRNÍ $\underset{\text{VĚTA 5.3}}{\Leftrightarrow} \det(A - \lambda I_m) = 0$

2) $x \in \mathbb{C}^n$ JE VLASTNÍM VEKTOREM PŘÍSLUŠNÝM K $\lambda \in \mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ (2)

$\underset{\text{DEFINICE}}{\Leftrightarrow} (A - \lambda I_n)x = 0, \; x \neq 0 \; \underset{\text{DEFINICE JÁDRA}}{\Leftrightarrow} x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$. $\boxtimes$

$\Rightarrow$ K VLASTNÍMU ČÍSLU λ PŘÍSLUŠÍ $\dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)) = n - \operatorname{RANK}(A - \lambda I_n)$ LINEÁRNĚ NEZÁVISLÝCH VLASTNÍCH VEKTORŮ

- NAPŘÍKLAD I_n MÁ VLASTNÍ ČÍSLO 1 A KAŽDÝ VEKTOR Z $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ JE VLASTNÍ $\Rightarrow$ MÁME n LINEÁRNĚ NEZÁVISLÝCH VEKTORŮ K $\lambda = 1$

- U NĚKTERÝCH MATIC LZE VLASTNÍ ČÍSLO NALÉZT SNADNO
- VLASTNÍ ČÍSLA TROJÚHELNÍKOVÉ MATICE $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ JSOU PRVKY NA DIAGONÁLE
  - PROTOŽE PAK $A - \lambda I_n$ JE TROJÚHELNÍKOVÁ A $\det(A - \lambda I_n)$ JE SOUČINEM PRVKŮ NA DIAGONÁLE $\Rightarrow \det(A - \lambda I_n) = (a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$ A PODLE VĚTY 7.1 JSOU VLASTNÍMI ČÍSLY KOŘENY $a_{11}, \ldots, a_{nn}$
  - BOHUŽEL ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ OPERACE MOHOU MĚNIT VLASTNÍ ČÍSLA $\Rightarrow$ NELZE SE OMEZIT NA REF(A)
- VÝPOČET VLASTNÍCH ČÍSEL MATICE A LZE PŘEVÉST NA ÚLOHU HLEDÁNÍ KOŘENŮ POLYNOMU I OBECNĚ, PROTOŽE $\det(A - \lambda I_n) =$

$$= \underbrace{\sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \left(A_{1,p(1)} - \delta_{1,p(1)}\lambda\right) \cdots \left(A_{n,p(n)} - \delta_{n,p(n)}\lambda\right)}_{\text{POLYNOM STUPNĚ} \leq n \text{ V PROMĚNNÉ } \lambda}, \text{ KDE}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

- CHARAKTERISTICKÝ POLYNOM MATICE $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ VZHLEDEM K PROMĚNNÉ λ JE $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

- Z DEFINICE DETERMINANTU PLATÍ:

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \underbrace{\alpha_{n-1}}_{= (-1)^{n-1}(A_{11} + \cdots + A_{nn})} \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \underbrace{\alpha_0}_{= \det(A)} \text{ PRO } \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$$

($\alpha_0 = \det(A)$ PLYNE Z DOSAZENÍ $\lambda = 0$)

$\Rightarrow$ STUPEŇ $p_A(\lambda)$ JE n $\underset{\text{ZÁKLADNÍ VĚTA ALGEBRY}}{\Rightarrow}$ n KOŘENŮ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (S NÁSOBNOSTMI)

$\hookrightarrow p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$

⇒ VLASTNÍ ČÍSLA MATICE $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ JSOU PRÁVĚ KOŘENY $p_A(\lambda)$ A JE JICH PRÁVĚ m (VČETNĚ NÁSOBNOSTÍ)

− PŘÍKLAD:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \Rightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_m) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = (\lambda + 2i)(\lambda - 2i)$$

⇒ VLASTNÍ ČÍSLA $2i, -2i$

$-2i$ → VLASTNÍ VEKTOR $(1, i)^T$

$2i$ → VLASTNÍ VEKTOR $(1, -i)^T$

− SPOČÍTAT KOŘENY $p_A(\lambda)$ JE TĚŽKÉ (DOKONCE JE NETRIVIÁLNÍ URČIT KOEFICIENTY $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}$)

− VLASTNÍ ČÍSLA (I KOŘENY POLYNOMŮ) SE POČÍTAJÍ ITERATIVNÍMI METODAMI

− (ALGEBRAICKÁ) NÁSOBNOST VLASTNÍHO ČÍSLA $\lambda \in \mathbb{C}$ MATICE $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ JE ROVNA NÁSOBNOSTI λ JAKOŽTO KOŘENE $p_A(\lambda)$.

− GEOMETRICKÁ NÁSOBNOST λ JE ROVNA $m - \mathrm{RANK}(A - \lambda I_m)$

− ALGEBRAICKÁ NÁSOBNOST ≥ GEOMETRICKÁ NÁSOBNOST

− STOPA MATICE $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ JE $\mathrm{TRACE}(A) = \sum_{i=1}^{m} A_{ii}$ → SOUČET PRVKŮ NA DIAGONÁLE

− TVRZENÍ 7.2 (SOUČIN A SOUČET VLASTNÍCH ČÍSEL): JSOU-LI $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ VLASTNÍ ČÍSLA MATICE $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, PAK PLATÍ

1) $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_m$,
2) $\mathrm{TRACE}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_m$.

DK:

1) VÍME, ŽE $\det(A - \lambda I_m) = (-1)^m (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_m)$. PRO $\lambda = 0$ DOSTÁVÁME

$$\det(A) = (-1)^m (-\lambda_1) \cdots (-\lambda_m) = \underline{\underline{\lambda_1 \cdots \lambda_m}}$$

→ $2m$-KRÁT -1 V SOUČINU

2) KOEFICIENT α_{m-1} U λ^{m-1} V $p_A(\lambda)$ VZNIKNE:

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_m)$

a) POUZE ZE SOUČINU $(A_{11} - \lambda) \cdots (A_{mm} - \lambda) \Rightarrow \alpha_{m-1} = (-1)^{m-1}(A_{11} + \dots + A_{mm})$

$p_A(\lambda) = (-1)^m (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_m)$

b) ZE SOUČINU $(-1)^m (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_m) \Rightarrow \alpha_{m-1} = (-1)^m (-\lambda_1 - \dots - \lambda_m)$

$$\Rightarrow (-1)^{m-1}(-A_{11} - \dots - A_{mm}) = (-1)^m (-\lambda_1 - \dots - \lambda_m) \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1 + \dots + \lambda_m = \mathrm{TRACE}(A)}}$$

⊠

- PODOBNĚ SE DAJÍ VLASTNÍMI ČÍSLY ZACHYTIT I JINÉ VLASTNOSTI MATICE

- **VĚTA 7.3** (VLASTNOSTI VLASTNÍCH ČÍSEL): JSOU-LI $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ VLASTNÍ ČÍSLA MATICE $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ S PŘÍSLUŠNÝMI VLASTNÍMI VEKTORY $x_1, \dots, x_m$, PAK PLATÍ:

  1) A JE REGULÁRNÍ $\Leftrightarrow$ 0 NENÍ VLASTNÍM ČÍSLEM A,
  2) JE-LI A REGULÁRNÍ, PAK $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_m^{-1}$ JSOU VLASTNÍ ČÍSLA A^{-1} S VLASTNÍMI VEKTORY $x_1, \dots, x_m$
  3) A^2 MÁ VLASTNÍ ČÍSLA $\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2$ A VLASTNÍ VEKTORY $x_1, \dots, x_m$
  4) αA MÁ VLASTNÍ ČÍSLA $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_m$ A VLASTNÍ VEKTORY $x_1, \dots, x_m$
  5) $A + \alpha I_m$ MÁ VLASTNÍ ČÍSLA $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_m + \alpha$ A VLASTNÍ VEKTORY $x_1, \dots, x_m$
  6) A^T MÁ VLASTNÍ ČÍSLA $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, ALE VLASTNÍ VEKTORY OBECNĚ JINÉ

<u>DK (NÁČRT):</u>

- DOKÁŽEME JEN 1), 2) (ZBYTEK NA PROCVIČENÍ)

1) 0 JE VLASTNÍM ČÍSLEM $A \overset{\text{VĚTA 7.1}}{\Leftrightarrow} 0 = \det(A - 0 I_m) = \det(A) \overset{\text{VĚTA 5.3}}{\Leftrightarrow}$ A JE SINGULÁRNÍ

2) PRO KAŽDÉ $i = 1, \dots, m$ JE $A x_i = \lambda_i x_i$. PŘENÁSOBENÍM A^{-1} DOSTANEME $x_i = \lambda_i A^{-1} x_i$ A VYDĚLENÍM $\lambda_i \neq 0$ MÁME $A^{-1} x_i = \lambda_i^{-1} x_i$

$\Rightarrow \lambda_i^{-1}$ JE VLASTNÍM ČÍSLEM A^{-1}

PLATÍ PODLE ČÁSTI 1) (A JE REGULÁRNÍ)

$\otimes$

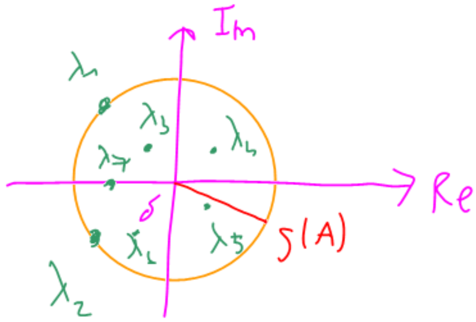
- REÁLNÁ MATICE $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ MŮŽE MÍT KOMPLEXNÍ VLASTNÍ ČÍSLA
- POKUD JE OVŠEM $\lambda \in \mathbb{C}$ VLASTNÍM ČÍSLEM A, PAK JE JÍM I $\overline{\lambda}$ (KOMPLEXNĚ SDRUŽENÉ λ)
  - PROTOŽE λ_i JE KOŘENEM $p_A(\lambda) \Leftrightarrow \overline{\lambda_i}$ JE KOŘENEM $p_A(\lambda)$

$$p_A(\lambda) = \left\{ (-1)^m \lambda^m + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + \alpha_0 = 0 \right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\overline{(-1)^m \lambda^m + \dots + \alpha_0} = \overline{0} \quad = \left\{ (-1)^m \overline{\lambda}^m + \alpha_{m-1}\overline{\lambda}^{m-1} + \dots + \alpha_0 = 0 \right.$$

- **SPEKTRUM MATICE** $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ S VLASTNÍMI ČÍSLY $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ JE MNOŽINA $\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$
- **SPEKTRÁLNÍ POLOMĚR** JE $\varrho(A) = \max\limits_{i=1,\dots,m} |\lambda_i|$



- VÍME, ŽE VÝPOČET VLASTNÍCH ČÍSEL LZE PŘEVÉST NA ÚLOHU HLEDÁNÍ KOŘENŮ POLYNOMU. TO PLATÍ I OBRÁCENĚ, COŽ SE DÁ UKÁZAT PŘES NÁSLEDUJÍCÍ MATICI.
- **MATICE SPOLEČNICE** POLYNOMU $p(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$ JE

$$C(p) := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix}}_{m} \Bigg\} m$$

- **VĚTA 7.4** (O MATICI SPOLEČNICI): VLASTNÍ ČÍSLA $C(p)$ ODPOVÍDAJÍ KOŘENŮM p
  - NEBOLI $p_{C(p)}(\lambda) = (-1)^m p(\lambda)$
  - BEZ DŮKAZU